

MOTION

Nurturing potential through education

Fastest Growing Institute of Kota (Raj.)

FOR JEE Advanced (IIT-JEE) | JEE Main (AIEEE) | AIPMT | CBSE | SAT | NTSE | OLYMPIADS

JEE MAIN + ADVANCED

EXAMINATION - 2016

QUESTION WITH SOLUTION

PAPER - 2 _ CODE - 1

[PHYSICS]

1. The electrostatic energy of Z protons uniformly distributed throughout a spherical nucleus of

radius R is given by $E = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$

The measured masses of the neutron, ${}^1_1\text{H}$, ${}^{15}_7\text{N}$ and ${}^{15}_8\text{O}$ are 1.008665 u, 1.007825 u, 15.000109 u and 15.003065 u, respectively. Given that the radii of both the ${}^{15}_7\text{N}$ and ${}^{15}_8\text{O}$ nuclei are same, $1 \text{ u} = 931.5 \text{ MeV}/c^2$ (c is the speed of light) and $e^2/(4\pi\epsilon_0) = 1.44 \text{ MeV fm}$. Assuming that the difference between the binding energies of ${}^{15}_7\text{N}$ and ${}^{15}_8\text{O}$ is purely due to the electrostatic energy, the radius of either of the nuclei is ($1 \text{ fm} = 10^{-15}\text{m}$)

- (A) 2.85 fm (B) 3.03 fm (C) 3.42 fm (D) 3.80 fm

त्रिज्या R वाले एक गोलाकार नाभिक में Z प्रोटोन समानरूप से वितरित है। ऐसे नाभिक की स्थिर विद्युत ऊर्जा नीचे समीकरण में

दी गई है। $E = \frac{3Z(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$

न्यूट्रॉन ${}^1_1\text{H}$, ${}^{15}_7\text{N}$ एवं ${}^{15}_8\text{O}$ नाभिकों के मापे गये द्रव्यमान क्रमशः 1.008665 u, 1.007825 u, 15.000109 u एवं 15.003065 u है। ${}^{15}_7\text{N}$ एवं ${}^{15}_8\text{O}$ नाभिकों की त्रिज्याएँ समान दी गई है। $1 \text{ u} = 931.5 \text{ MeV}/c^2$ (जहाँ c प्रकाश की गति है)

और $e^2/(4\pi\epsilon_0) = 1.44 \text{ MeV fm}$ । यदि ${}^{15}_7\text{N}$ और ${}^{15}_8\text{O}$ की बंधक ऊर्जाओं का अंतर सिर्फ स्थिर विद्युत ऊर्जा के कारण है, तो दोनों में से किसी भी नाभिक की त्रिज्या क्या होगी? ($1 \text{ fm} = 10^{-15}\text{m}$)

- (A) 2.85 fm (B) 3.03 fm (C) 3.42 fm (D) 3.80 fm

Sol.

C

$${}^{15}_7\text{N} \rightarrow 7({}^1_1\text{H}) + 8({}^1_0\text{n})$$

$$BE_{(N)} = 0.123986 \times 931.5 = 115.492959 \text{ MeV}$$

$${}^{15}_8\text{O} \rightarrow 8({}^1_1\text{H}) + 7({}^1_0\text{n})$$

$$BE_{(O)} = 0.12019 \times 931.5 = 111.956985 \text{ MeV}$$

$$BE_{(N)} - BE_{(O)} = 3.535974 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} [8(7) - 7(6)]$$

$$\Rightarrow R = 3.42 \text{ fm}$$

2. An accident in a nuclear laboratory resulted in deposition of a certain amount of radioactive material of half - life 18 days inside the laboratory. Tests revealed that the radiation was 64 times more than the permissible level required for safe operation of the laboratory. What is the minimum number of days after which the laboratory can be considered safe for use?

- (A) 64 (B) 90 (C) 108 (D) 120

एक नाभिकीय प्रयोगशाला में दुर्घटना की वजह से रेडियाएक्टिव पदार्थ की कुछ मात्रा जमा हो गई, जिसकी अर्धायु 18 दिनों की है। परीक्षण से पता चला कि प्रयोगशाला में विकिरण का स्तर सुरक्षित स्तर से 64 गुणा ज्यादा था। न्यूनतम कितने दिनों के बाद प्रयोगशाला काम करने के लिए सुरक्षित होगी?

- (A) 64 (B) 90 (C) 108 (D) 120

Sol.

C

$$64 = 2^6$$

\therefore the material should decay for 6 half lines for a safe laboratory.

$$\text{Thus answer} = 18 \times 6 = 108 \text{ days}$$

3. A gas enclosed in a cylinder with movable frictionless piston. Its initial thermodynamic state at pressure $P_i = 10^5 \text{ Pa}$ and volume $V_i = 10^{-3} \text{ m}^3$ changes to a final state at $P_f = (1/32) \times 10^5 \text{ Pa}$ and $V_f = 8 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ in an adiabatic quasi-static process, such that $P^3V^5 = \text{constant}$. Consider another thermodynamic process that brings the system from the same initial state to the same final state in two steps : an isobaric expansion at P_i followed by an isochoric (isovolumetric) process at volume V_f . The amount of heat supplied to the system in the two process is approximately
- (A) 112 J (B) 294 J (C) 588 J (D) 813 J

एक खोखले बेलन, जिसमें एक घर्षण – रहित चलायमान पिस्टन लगा है, में एक गैस बंद है। निकाय की प्रारम्भिक ऊष्मागतिकी अवस्था में गैस का दबाव $P_i = 10^5 \text{ Pa}$ एवं आयतन $V_i = 10^{-3} \text{ m}^3$ है। एक रूद्धोष्म स्थैतिककल्प की प्रक्रिया, जिसमें $P^3V^5 = \text{स्थिरांक}$ है, से निकाय अंतिम ऊष्मागतिकी की अवस्था $P_f = (1/32) \times 10^5 \text{ Pa}$ एवं $V_f = 8 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ में परिवर्तित हो जाता है। एक दूसरी ऊष्मागतिकी प्रक्रिया में वही प्रारम्भिक एवं अंतिम अवस्थाएं दो चरणों में पूर्ण की जाती है, पहले चरण में P_i पर समान दबाव वृद्धि के बाद एक दुसरे चरण में एक समान आयतन प्रक्रिया V_f आयतन पर होती है। दो चरणों वाली प्रक्रिया में निकाय को दी गई ऊष्मा की मात्रा लगभग है।

- (A) 112 J (B) 294 J (C) 588 J (D) 813 J

Sol. C

$$P_1 = 10^5 \quad P_2 = \frac{P_1}{32}$$

$$V_1 = 10^{-3} \quad V_2 = 8V_1$$

$$PV^{5/3} = K$$

$$\gamma = 5/3$$

$$Q = nC_p dT + nC_v dT$$

$$= n \frac{5}{2} R (T_2 - T_1) + n \frac{3}{2} R (T_3 - T_2)$$

$$= \frac{5}{2} nR (8T_1 - T_1) + \frac{3}{2} nR (T_3 - 8T_1)$$

$$= \frac{5}{2} nR (7T_1) + \frac{3}{2} nRT_3 - 12 nRT_1$$

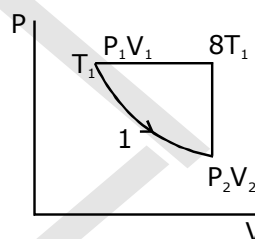
$$= \frac{35}{2} nRT_1 - 12 nRT_1 + \frac{3}{2} nRT_3$$

$$= \frac{11}{2} nRT_1 + \frac{3}{2} nRT_3$$

$$\frac{11}{2} (100) + \frac{3}{2} (25)$$

$$= \frac{1100 + 75}{2}$$

$$= \frac{1175}{2} = 588$$

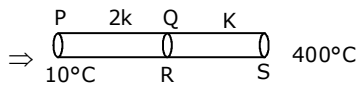
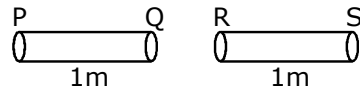


4. The ends Q and R of two thin wires, PQ and RS, are soldered (Joined) together. Initially each of the wires has a length of 1m at 10°C . Now the end P is maintained at 10°C , while the end S is heated and maintained at 400°C . The system is thermally insulated from its surroundings. If the thermal conductivity of wire PQ is twice that of the wire RS and the coefficient of linear thermal expansion of PQ is $1.2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. the change in length of the wire PQ is
- (A) 0.78 mm (B) 0.90 mm (C) 1.56 mm (D) 2.34 mm

एक पतले तार PQ के छोर Q को अन्य पतले तार RS के छोर R पर टांका लगाकर जोड़ा गया है। 10°C पर दोनों तारों की लम्बाई 1m है। अब इस निकाय के छोर P तथा छोर S को क्रमशः 10 °C तथा 400 °C पर स्थिर रखा जाता है। यह निकाय चारो ओर से ऊष्मारोधी है। यदि तार PQ की ऊष्मा चालकता तार RS की ऊष्मा चालकता से दुगुनी है। तथा तार PQ का रेखीय ऊष्मित वृद्धि गुणांक $1.2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ है, तब तार PQ की लम्बाई में परिवर्तन का मान है।

- (A) 0.78 mm (B) 0.90 mm (C) 1.56 mm (D) 2.34 mm

Sol. A



$$\frac{400 - \theta_0}{R} = \frac{\theta_0 - 10}{R/2}$$

$$\frac{400 - \theta_0}{R} = \frac{2(\theta_0 - 10)}{R}$$

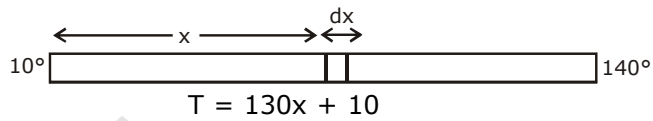
$$420 = 3\theta_0$$

$$\theta_0 = \frac{420}{3} = 140^\circ\text{C}$$

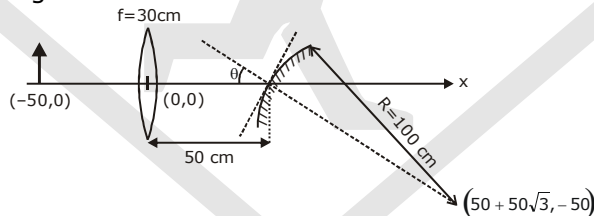
$$dl = \alpha \Delta\theta dx$$

$$\int dl = \int 1.2 \times 10^{-5} (130x) dx$$

$$\Delta l = 1.2 \times 10^{-5} \times 65 = 0.78\text{mm}$$



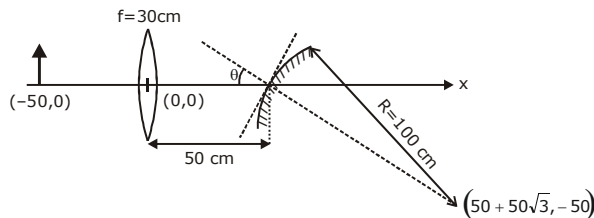
5. A small object is placed 50 cm to the left of a thin convex lens of focal length 30 cm. A convex spherical mirror of radius of curvature 100 cm is placed to the right of the lens at a distance of 40 cm. The mirror is tilted such that the axis of the mirror is at an angle $\theta = 30^\circ$ to the axis of the lens, as shown in the figure.



If the origin of the coordinate system is taken to be at the centre of the lens, the coordinates (in cm) of the point (x, y) at which the image is formed are

- (A) (0, 0) (B) $(50 - 25\sqrt{3}, 25)$ (C) $(25, 25\sqrt{3})$ (D) $(125/3, 25\sqrt{3})$

एक छोटी वस्तु को 30 cm फोकस दूरी (focal length) वाले एक पतले उत्तल (convex) वाले एक पतले उत्तल लेंस की बाईं ओर 50 cm की दूरी पर रखा गया है। 100 cm की वक्रता त्रिज्या वाले एक उत्तल गोलाकार दर्पण को लेंस की दाईं ओर 50 cm की दूरी रखा गया है। दर्पण को इस तरह से झुकाया गया है कि दर्पण का अक्ष लेंस से $\theta = 30^\circ$ को कोण बनाता है, जैसा चित्र में दर्शाया गया है।

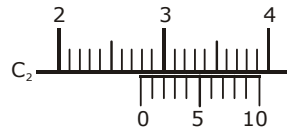
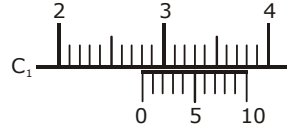


यदि निर्देशांक पद्धति का मूल बिन्दु लेंस के मध्य में हो तो जहाँ प्रतिबिम्ब बना है उस बिंदु का निर्देशांक (x, y) सेंटीमीटर में, क्या होगा?

- (A) (0, 0) (B) $(50 - 25\sqrt{3}, 25)$ (C) $(25, 25\sqrt{3})$ (D) $(125/3, 25\sqrt{3})$

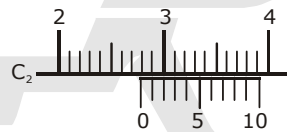
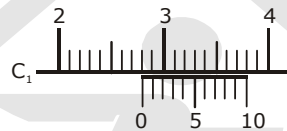
Sol. Bonus

6. There are two Vernier calipers both of which have 1 cm divided into 10 equal divisions on the main scale. The Vernier scale of one of the calipers (C_1) has 10 equal divisions the correspond to 9 main scale divisions. The Vernier scale of the other caliper (C_2) has 10 equal divisions that correspond to 11 main scale divisions. The readings of the two calipers at shown in the figure. The measured values (in cm) by calipers C_1 and C_2 , respectively, are



- (A) 2.85 and 2.82 (B) 2.87 and 2.83 (C) 2.87 and 2.86 (D) 2.87 and 2.87

दो वर्नियर कैलिपर्स इस तरह से हैं कि उनके मुख्य पैमाने का 1 cm, 10 सतभागों में विभाजित है। एक कैलिपर (C_1) के वर्नियर पैमाने पर 10 बराबर भाग है जो कि मुख्य पैमाने के 9 भागों के बराबर है। दूसरे कैलिपर (C_2) के वर्नियर पैमाने पर भी 10 बराबर भाग हैं जो कि मुख्य पैमाने के 11 भागों के बराबर हैं। दोनों कैलिपर्स के पठनों को चित्र में दर्शाया गया है। C_1 तथा C_2 दुबारा मापे गए सही मान (cm में) क्रमशः है।



- (A) 2.85 एवं 2.82 (B) 2.87 एवं 2.83 (C) 2.87 एवं 2.86 (D) 2.87 एवं 2.87

Sol.

B

$$LC_1 = 1 \text{ MSD} - 1 \text{ VSD}$$

$$10 \text{ VSD} \rightarrow 9 \text{ MSD}$$

$$1 \rightarrow \frac{9}{10} \text{ MSD}$$

$$LC_1 = 1 \text{ MS} - \frac{9}{10} \text{ MS}$$

$$= \frac{1}{10} \text{ MSD}$$

$$= \frac{1}{100} \text{ cm}$$

$$C_1 = 2.8 + 7 \times \frac{1}{100}$$

$$= 2.87$$

$$LC_2 = 1 \text{ MSD} - \text{VSD}$$

$$11 \text{ VSD} \rightarrow 10 \text{ MSD}$$

$$1 \text{ VSD} \rightarrow \frac{10}{11} \text{ MSD}$$

$$LC_2 = \left(1 - \frac{10}{11}\right) \text{ MS}$$

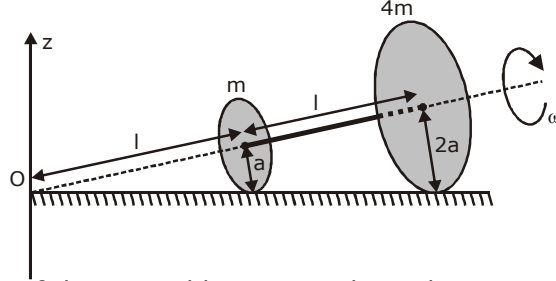
$$= -\frac{1}{11} \times \frac{1}{10} \text{ cm}$$

$$= -\frac{1}{110} \text{ cm}$$

$$C_2 = 2.9 - 7 \times \frac{1}{110}$$

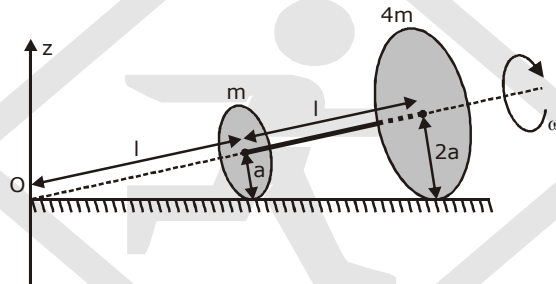
$$= 2.83$$

7. Two thin circular discs of mass m and $4m$, having radii of a and $2a$, respectively are rigidly fixed by a massless, rigid rod of length $l = \sqrt{24}a$ through their centers. This assembly is laid on a firm and flat surface, and set rolling without slipping on the surface so that the angular speed about the axis of the rod is ω . The angular momentum of the entire assembly about the point 'O' is \vec{L} (see the figure) Which of the following is statement(s) is (are) true?



- (A) The center of mass of the assembly rotates about the z -axis with an angular speed of $\omega/5$.
 (B) The magnitude of angular momentum of center of mass of the assembly about the point O is $81 ma^2\omega$
 (C) The magnitude of angular momentum of the assembly about its center of mass is $17ma^2\omega/2$
 (D) The magnitude of the z -component of \vec{L} is $55ma^2\omega$

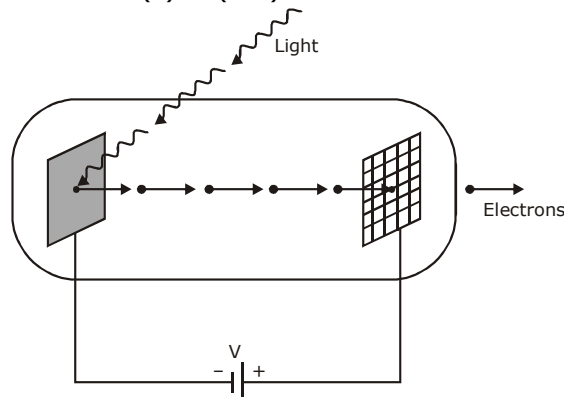
m तथा $4m$ द्रव्यमान वाली दो पतली वृत्ताकार चत्रिकाएँ जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः a तथा $2a$ है, के केन्द्रों को $l = \sqrt{24}a$ लम्बाई की द्रव्यमान - रहित द्रढ़ ठंडी से जोड़ा गया है। इस समूह को एक मजबूत समतल सतह पर लिटाया गया है और फिसलाये बिना इस तरह से घुमाया गया है कि इसकी कोणीय गति ठंडी के अक्ष के गिर्द ω है। पूरे समूह का बिन्दु 'O' के गिर्द कोणीय संवेग \vec{L} (चित्र में देखें) निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?



- (A) \vec{L} के z -घटक का परिमाण $55ma^2\omega$ है।
 (B) पूरे समूह के संहति - केन्द्र को बिन्दु z -अक्ष के गिर्द कोणीय वेग $\omega/5$ से घूम रहा है।
 (C) पूरे समूह का संहति केन्द्र का बिन्दु O के गिर्द कोणीय संवेग का परिमाण $81 ma^2\omega$ है।
 (D) पूरे समूह के संहति - केन्द्र के गिर्द कोणीय संवेग को परिमाण $17ma^2\omega/2$ है।

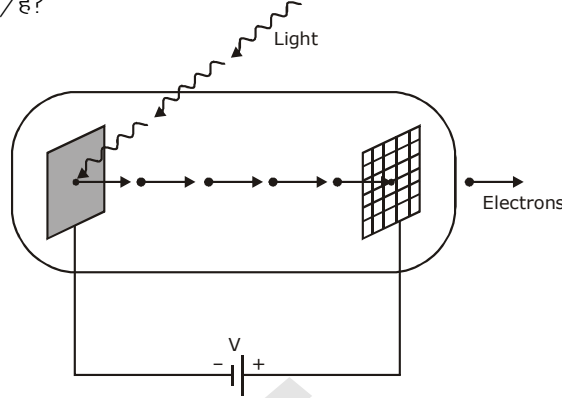
Sol. A,C

8. Light of wavelength λ_{ph} falls on a cathode plate inside a vacuum tube as shown in the figure. The work function of the cathode surface is ϕ and the anode is a wire mesh of conducting material kept at a distance d from the cathode. A potential difference V is maintained between the electrode. If the minimum de Broglie wavelength of the electrons passing through the anode is λ_e , which of the following statement(s) is (are) true?



- (A) λ_e decreases with increase in ϕ and λ_{ph}
 (B) λ_e is approximately halved, if d is doubled
 (C) For large potential difference ($V \gg \phi/e$), λ_e approximately halved if V is made four times
 (D) λ_e increases at the same rate as λ_{ph} for $\lambda_{ph} < hc/\phi$

λ_{ph} तरंगदैर्घ्य का प्रकाश निर्वात नलीका के अंदर एक कैथोड पर गिरता है, जैसा चित्र में दर्शाया गया है। कैथोड की सतह का कार्यफलन ϕ है एवं एनोड जो कि एक चालकीय पदार्थ के तारों की जाली है, कैथोड से d दूरी पर स्थित है। इलेक्ट्रॉनों के बीच का विभवान्तर V स्थिर है। यदि एनोड को पार करने वाले इलेक्ट्रॉनों की न्यूनतम "दी ब्रोग्ली" तरंगदैर्घ्य λ_e है, निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?



- (A) अगर $\lambda_{ph} < hc/\phi$ है तो λ_{ph} के साथ λ_e एक समान दर से बढ़ेगा।
 (B) ϕ और λ_{ph} को बढ़ाने पर λ_e कम होगा।
 (C) d को दुगुना करने पर λ_e लगभग आधा हो जाएगा।
 (D) उच्च विभवान्तर ($V \gg \phi/e$), पर अगर V को चार बढ़ाया जाए तो λ_e लगभग आधा हो जाएगा।

Sol. C

$$eV = \frac{hc}{\lambda_{ph}} - \phi$$

$$v = \frac{hc}{\lambda_{ph}e} - \frac{\phi}{e}$$

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$$

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$

9. In an experiment to determine the acceleration due to gravity g , the formula used for the time

period of a periodic motion is $T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$. The values of R and r are measured to be (60 ± 1)

mm and $(m \pm 1)$ mm, respectively. In five successive measurements, the time period is found to be 0.52 s, 0.56 s, 0.57 s, 0.54 s and 0.59 s. The least count of the watch used for the measurement of time period is 0.01 s. Which of the following statement(s) is (are) true?

- (A) The error in the measurement of r is 10%
 (B) The error in the measurement of T is 3.57%
 (C) The error in the measurement of T is 2%
 (D) The error in the determined value of g is 11%

गुरुत्वीय त्वरण g के निर्धारण के एक प्रयोग में प्रयुक्त आवर्ती - गति का समयकाल का सूत्र $T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$ है। R तथा r

का मापा गया मान क्रमशः (60 ± 1) mm तथा (10 ± 1) mm है। लगातार पांच मापन में मापा गया समयकाल 0.52 s, 0.56 s, 0.57 s, 0.54 s तथा 0.59 s है। समयकाल के मापन के लिए प्रयोग में लायी गयी घड़ी का अल्पतमांक 0.01 s है। निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य हैं?

(A) r के मापन में त्रुटि 10% है।

(B) T के मापन में त्रुटि 3.57% है।

(C) T के मापन में त्रुटि 2% है।

(D) g के निकाले गये मान में त्रुटि 11% है।

Sol. A, B, D

$$(a) \quad \frac{\Delta r}{r} \times 100 = \frac{1}{10} \times 100 = 10\%$$

$$(b) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

$$R = 60 \pm 1$$

$$r = 10 \pm 1$$

$$T_m = \frac{0.52 + 0.56 + 0.57 + 0.54 + 0.59}{5}$$

$$= 0.556$$

$$\Delta T_1 = 0.556 - 0.52 = 0.036$$

$$\Delta T_2 = 0.556 - 0.56 = 0.004$$

$$\Delta T_3 = 0.556 - 0.57 = 0.014$$

$$\Delta T_4 = 0.556 - 0.54 = 0.016$$

$$\Delta T_5 = 0.556 - 0.59 = 0.036$$

$$\Delta T_n = \frac{0.036 + 0.016 + 0.014 + 0.004 + 0.036}{5}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{0.020}{0.556} \times 100 = 3.57\%$$

$$(d) \quad g = \frac{4\pi^2 (7R-r)}{5T^2}$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta(R-r)}{R-r} + 2 \frac{\Delta T}{T}$$

$$= \frac{2}{50} + \frac{2 \times 0.02}{0.556}$$

$$= \left(\frac{2}{50} + \frac{42}{55} \right) \times 100$$

$$= 4 + 7.5$$

$$= 11.7 \%$$

10. Consider two identical galvanometers and two identical resistors with resistance R . If the internal of the galvanometers $R_c < R/2$, which of the following statement(s) about any one of the galvanometer is (are) true?
- (A) The maximum voltage range is obtained when all the components are contained in series
 - (B) The maximum voltage range is obtained when the two resistors and one galvanometer are connected in series, and the second galvanometer is connected in parallel to the first galvanometer
 - (C) The maximum current range is obtained when all the components are connected in parallel
 - (D) The maximum current range is obtained when the two galvanometers are connected in series and the combination is connected in parallel with both the resistors

दो एक समान गेल्वेनोमीटर तथा एकसमान प्रतिरोध R वाले दो प्रतिरोध दिये गये हैं। यदि गेल्वेनोमीटर का आंतरिक प्रतिरोध $R_c < R/2$ है, तो किसी भी एक गेल्वेनोमीटर के बारे में दिये गए निम्नलिखित कथनों में से कौनसा/कौनसे सत्य है/हैं?

- (A) प्राप्त कि गई वोल्टता परिसर अधिकतम होगी जब सभी घटक श्रेणी में जुड़े हुए हैं।
- (B) प्राप्त कि गई वोल्टमीटर परिसर अधिकतम होगी जब दो प्रतिरोधक तथा एक गेल्वेनोमीटर श्रेणी में जुड़े हैं तथा दूसरा गेल्वेनोमीटर पहले गेल्वेनोमीटर के समानान्तर में जुड़ा है।
- (C) प्राप्त कि गई धारा परिसर अधिकतम होगी जब सभी घटक समानान्तर में जुड़े हैं।
- (D) प्राप्त कि गई धारा परिसर अधिकतम होगी जब दो गेल्वेनोमीटर श्रेणी में जुड़े हैं। तथा ये संयोजन प्रतिरोधकों के साथ समानान्तर में जुड़ा है।

Sol. **A,C**

$$V = I_g (R_g + S)$$

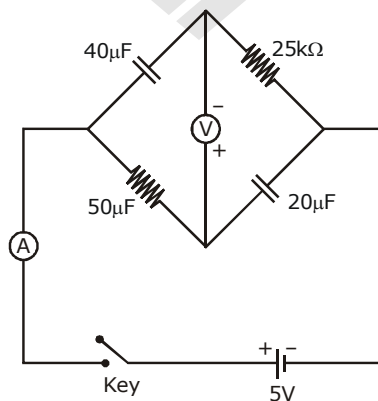
if R_g and S is large $V \uparrow$

$$I = I_g \left(1 + \frac{R_g}{S} \right)$$

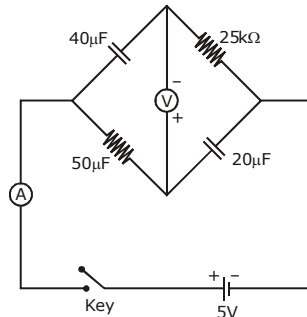
if $S \downarrow$ $R_g \uparrow$

Then $I \uparrow$

11. In the circuit shown below, the key is pressed at time $t = 0$. Which of the following statement (s) is (are) true ?

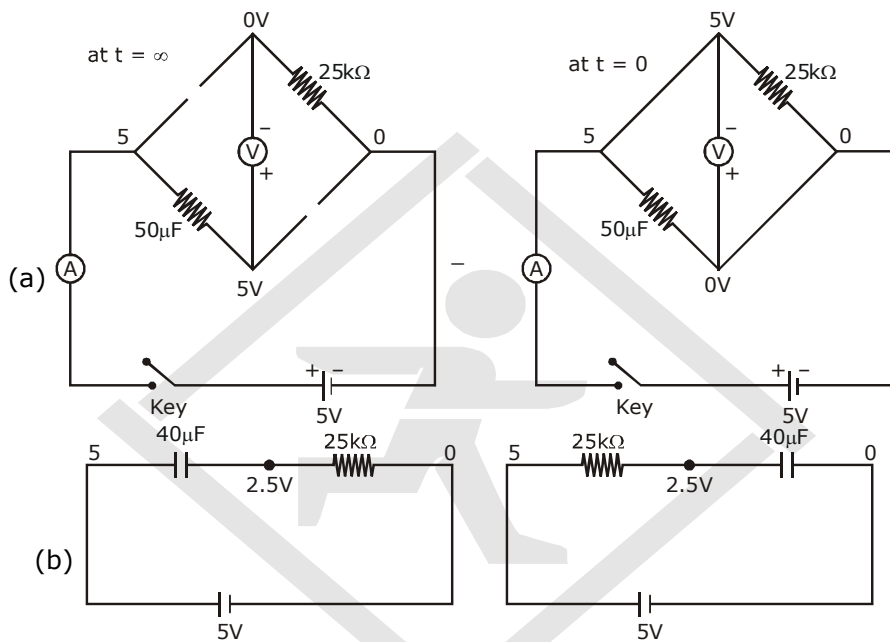


- (A) The voltmeter displays -5 V as soon as the key is pressed, and displays $+5$ after a long time
- (B) The voltmeter will display 0 V at time $t = \ln 2$ seconds
- (C) The current in the ammeter becomes $1/e$ of the initial value after 1 second
- (D) The current in the ammeter becomes zero after a long time



- (A) बटन को दबाते ही वोल्टमीटर -5 V दिखाता है जबकि लंबे समय के बाद वो $+5\text{ V}$ दिखाता है after a long time
 (B) समय $t = \ln 2$ seconds पर वोल्टमीटर शून्य वोल्ट दिखाता है
 (C) 1 second के बाद अमीटर में धारा प्रारम्भिक धारा को $1/e$ गुणा होती है।
 (D) लंबे समय के बाद अमीटर में धारा शून्य हो जाती है

Sol. A,B,C,D



$$V = 5(1 - e^{-t/RC})$$

$$RC = 1$$

$$V = 5(1 - e^{-\ln(2)})$$

$$V = 2.5\text{ V}$$

∴ Potential difference is zero.

(c) $I = I_0(e^{-t/RC})$

$$RC = 1$$

at $t = 1\text{ sec.}$

$$I = I_0/e$$

(d) at $t = \infty$

$$I = 0$$

12. A block with mass M is connected by a massless spring with stiffness constant k to a rigid wall and moves without friction on a horizontal surface. The block oscillates with small amplitude A about an equilibrium position x_0 . Consider two cases: (i) when the block is at x_0 ; and (ii) when the block is at $x = x_0 + A$. In both the cases, a particle with mass $m (< M)$ is softly placed on the block after which they stick to each other. Which of the following statements (s) is (are) true about the motion after the mass m is placed on the Mass M ?

(A) The amplitude of oscillation in the first case changes by a factor of $\sqrt{\frac{M}{m+M}}$, whereas in the second case it remains unchanged

(B) The final time period of oscillation in both the case is same

(C) The total energy decreases in both the cases

(D) The instantaneous speed at x_0 of the combined masses decreases in both the cases

एक द्रव्यमान-रहित स्प्रिंग, जिनका द्रढ़ता गुणांक (stiffness constant) k है, के एक छोर पर M द्रव्यमान का एक गुटका जुड़ा है, तथा दूसरे छोर को द्रढ़ दीवार से जोड़ा गया है। यह गुटका एक समतल दर्पण घर्षण-रहित सतह पर एक संतुलित स्थिति x_0 के गिर्द छोटे आयाम A से दोलन करता है। यहाँ दो परिस्थितियाँ मानिए : (i) जब गुटका x_0 पर है और (ii) जब गुटका $x = x_0 + A$ पर है। दोनों परिस्थितियों में द्रव्यमान $m (< M)$ के एक कण को गुटके पर धीरे से इस प्रकार रखा जाता है की वह तुरंत गुटके से चिपके जाता है। कण को गुटके के ऊपर के बाद गति के बारे में निम्नलिखित में से कौनसा/कसे कथन सत्य है/है ?

(A) पहली परिस्थिति में दोलन का आयाम $\sqrt{\frac{M}{m+M}}$, भाज्य (factor) से परिवर्तित होता है, जबकि दूसरी परिस्थिति में यह

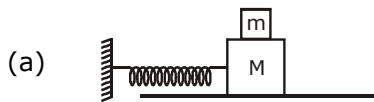
अपरिवर्तित रहता है।

(B) दोनों परिस्थितियों में दोलन का अंतिम समयकाल समान है

(C) दोनों परिस्थितियों में सम्पूर्ण ऊर्जा कम हो जाती है।

(D) सम्मिलित द्रव्यमानों की x_0 पर तात्क्षणिक गति दोनों परिस्थितियों में कम हो जाती है।

Sol. **A,B,D**



$$M\omega A = (m + M) \omega' A'$$

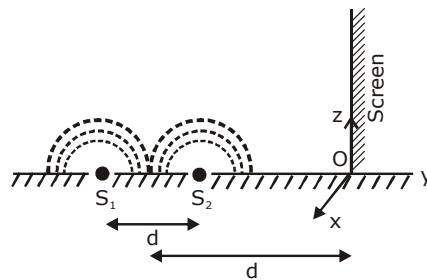
$$M\sqrt{\frac{k}{M}} A = (m + M) \sqrt{\frac{k}{M+m}} A'$$

$$\frac{A'}{A} = \sqrt{\frac{M}{m+M}}$$

$$(b) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{(M+m)}{k}}$$

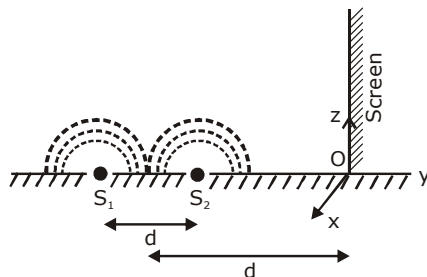
Time period remain same in both case. After m mass is placed on both block.

13. While conducting the Young's double slit experiment, a student replaced the two slits with a large opaque plate in the x - y plane containing two small holes that act as two coherent point sources (S_1, S_2) emitting light of wavelength 600 nm . The student mistakenly placed the screen parallel to the x - z plane (for $z > 0$) at a distance $D = 3 \text{ m}$ from the mid-point of S_1S_2 , as shown schematically in the figure. The distance between the sources $d = 0.6003 \text{ mm}$. The origin O is at the intersection of the screen and the line joining S_1S_2 . Which of the following is (are) true of the intensity pattern of the screen ?



- (A) Straight bright and dark bands parallel to the x-axis
- (B) The region very close to the point O will be dark
- (C) Hyperbolic bright and dark bands with foci symmetrically placed about O in the x-direction
- (D) Semi circular bright and dark bands centered at point O

एक विद्यार्थी ने यंग दो लिस्ट वाले प्रयोग (Young's double slit experiment,) करते समय दो स्लिटों की जगह एक बड़ी समतल अपारदर्शी पट्टी को x-y तल पर रख दिया। इस पट्टी में दो छिद्र हैं जो 600 nm तरंगदैर्घ्य प्रकाश उत्पन्न करने वाले दो कलासंबद्ध बिंदु स्त्रोतों (S₁, S₂) के समान हैं। विद्यार्थी ने गलती से पर्दे (screen) को x-z तल (z > 0) के समानान्तर S₁S₂ के मध्य बिंदु से D = 3m की दूरी पर रख दिया, जैसा की व्यवस्था-चित्र में दिखाया गया है। स्त्रोतों के बीच की दूरी d = 0.6003 mm है। S₁S₂ को जोड़ने वाली रेखा जहां पर्दे से मिलती है वहाँ पर मूलबिंदु O है। पर्दे पर तीव्रता प्रतिरूप (intensity pattern) के लिए निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है ?



- (A) बिंदु O पर केन्द्रित अर्धवृत्तीय दीप्त तथा अदीप्त पट्टियाँ
- (B) x-अक्ष के समानान्तर दीप्त तथा अदीप्त सीधी पट्टियाँ
- (C) बिंदु O का निकटतम क्षेत्र अदीप्त होगा
- (D) x-दिशा में बिंदु O के गिर्द सममित फोकसों के साथ अतिपरवलयिक (Hyperbolic) दीप्त तथा अदीप्त पट्टियाँ

Sol. B,D

(b) Fringes will be semi-circular.

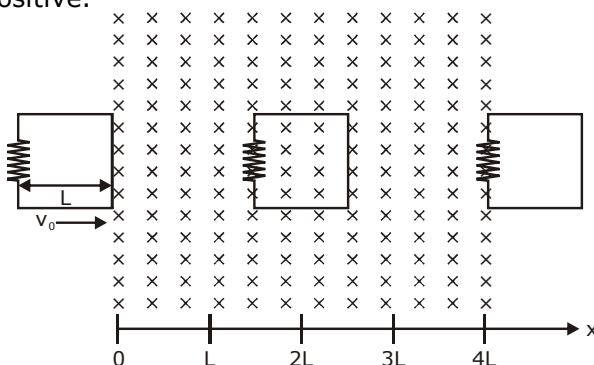
$$\text{Now, } \frac{d}{\lambda} = \frac{0.6003 \times 10^{-3}}{600 \times 10^{-9}}$$

$$\frac{d}{\lambda} = 10^3 + \frac{1}{2}$$

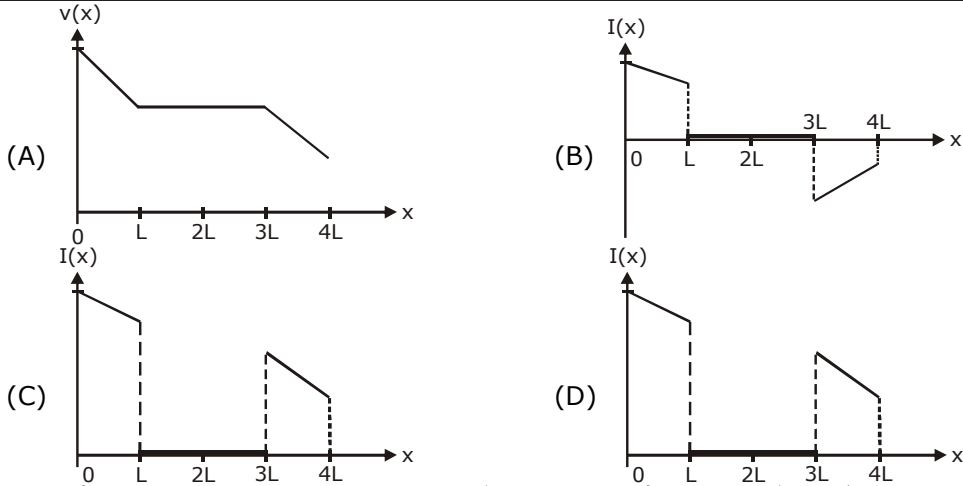
So, the region very close to O is dark.

(d) Semi circular bright and dark fringes will be formed.

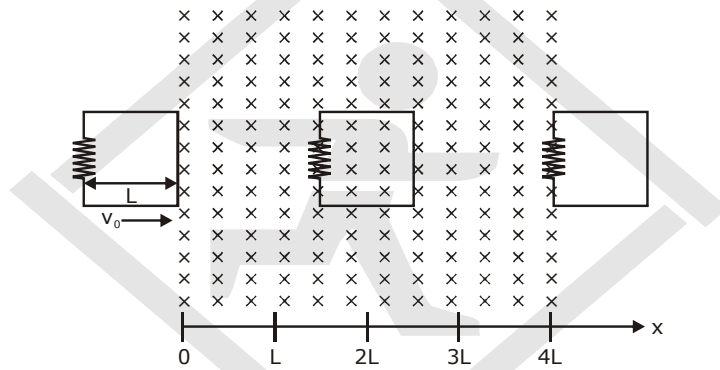
- 14.** A rigid wire loop of square shape having side of length L and resistance R is moving along the x-axis with a constant velocity v₀ in the plane of the paper. At t = 0, the right edge of the loop enters a region of length 3L where there is a uniform magnetic field B₀ into the plane of the paper, as shown in the figure. For sufficiently large v₀, the loop eventually crosses the region. Let x be location of the right edge of the loop. Let v(x), I(x) and F(x) represent the velocity of the loop, current in the loop, and force on the loop, respectively, as a function of x. Counter-clockwise current is taken as positive.



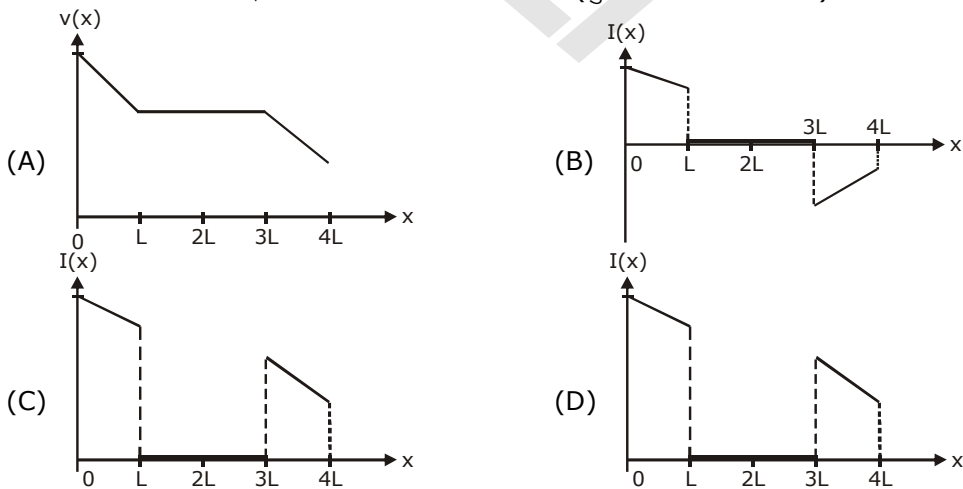
Which of the following schematic plot(s) is(are) correct ? (Ignore gravity)



एक वर्गीय आकृति वाला तार का द्रढ़ फंदा, जिसके भुजा की लंबाई L एवं प्रतिरोध R है, x -अक्ष की दिशा में एक स्थिर गति v_0 से इस कागज के प्लेन पर (plane of the paper) गतिमान है। समय $t = 0$ पर फंदे का दोहिना किनारा $3L$ लंबाई के स्थिर चुंबकीय क्षेत्र B_0 में प्रवेश करता है। चुंबकीय रेखाओं की दिशा कागज के प्लेन के लंबवत् अंदर की ओर है (जैसा चित्र में दर्शाया गया है)। v_0 का मान पर्याप्त होने पर अंततोगत्वा फंदा चुंबकीय क्षेत्र को पार करता है। मान लीजिए की फंदे की दाहिनी भुजा स्थान x पर है। फंदे की गति, फंदे में धारा एवं फंदे पर बल की x पर निर्भरता को क्रमशः $v(x)$, $I(x)$ एवं $F(x)$ से निरूपित किया गया है। वामवर्त धारा को पोजिटिव लें।



निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे व्यवस्था चित्र सही है ? (गुरुत्वाकर्षण नगण्य माने)



Sol. A,B

$$|\mathcal{E}| = \left| \frac{d\phi}{dt} \right|$$

$$\varepsilon = B \frac{dA}{dt}$$

$$\varepsilon = Bl \frac{dx}{dt}$$

$$\varepsilon = Blv$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R}$$

$$F = \frac{B^2 l^2}{R} k$$

$$-mv \frac{dv}{dx} = \frac{B^2 l^2}{R} k$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^x \frac{(-) B^2 l^2}{Rm} dx$$

$$v = v_0 - \frac{B^2 l^2}{mR} x$$

PARAGRAPH 1

A frame of reference that is accelerated with respect to an inertial frame of reference is called a non-inertial frame of reference. A coordinate system fixed on a circular disc rotating about a fixed axis with a constant angular velocity ω is an example of a non-inertial frame of reference. The

relationship between the force \vec{F}_{rot} experienced by a particle of mass m moving on the rotating

disc and the force \vec{F}_{in} experienced by the particle in an inertial frame of reference is

$$\vec{F}_{\text{rot}} = \vec{F}_{\text{in}} + 2m(\vec{v}_{\text{rot}} + \vec{\omega}) + m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega},$$

where \vec{v}_{rot} is the velocity of the particle in the rotating frame of reference and \vec{r} is the position vector of the particle with respect to the centre of the disc.

Now consider a smooth slot along a diameter of a disc of radius R rotating counter-clockwise with a constant angular speed ω about its vertical axis through its center. We assign a coordinate system with the origin at the center of the disc, the x -axis along the slot, the y -axis perpendicular

to the slot and the z -axis along the rotation axis ($\vec{\omega} = \omega \hat{k}$). A small block of mass m is gently

placed in the slot at $\vec{r} = (R/2) \hat{i}$ at $t = 0$ and is contained to move only along the slot.

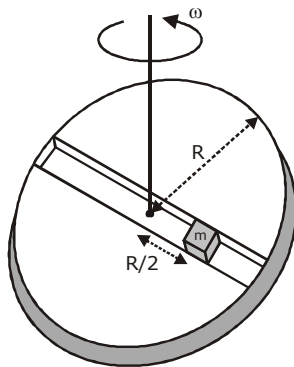
एक निर्देश तंत्र जो एक जड़त्विय निर्देश तंत्र की तुलना में त्वरित हो, अजड़त्विय निर्देश तंत्र कहलाता है। स्थिर कोणीय वेग ω से घूमती हुई डिस्क पर बद्ध (fixed) निर्देश तंत्र अजड़त्विय तंत्र का एक उदाहरण है। m द्रव्यमान का एक कण घूमती हुई डिस्क पर गतिमान है। गतिमान कण डिस्क पर बद्ध निर्देश तंत्र के सापेक्ष बल \vec{F}_{rot} तथा एक जड़त्विय निर्देश तंत्र के सापेक्ष बल

\vec{F}_{in} को महसूस करता है। \vec{F}_{rot} और \vec{F}_{in} के बीच का संबंध निम्नलिखित समीकरण में दिया गया है।

$$\vec{F}_{\text{rot}} = \vec{F}_{\text{in}} + 2m(\vec{v}_{\text{rot}} + \vec{\omega}) + m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega},$$

यहाँ पर \vec{v}_{rot} घूमते हुए निर्देश तंत्र में कण का वेग है तथा \vec{r} कण का डिस्क के मध्य बिंदु के सापेक्ष स्थिति सदिश (position vector) है।

मानिए कि R त्रिज्या की एक डिस्क, जिसमें व्यास के समानान्तर एक घर्षणरहित खाँचा है, एक स्थिर कोणीय गति ω से अपने अक्ष पर वामावर्त दिशा में घूम रही है। एक निर्देश तंत्र मानिए जिसका मूलबिंदु डिस्क के मध्य बिंदु पर है एवं x-अक्ष खाँचे के समानान्तर है, y-अक्ष खाँचे के अभिलम्ब पर है एवं z-अक्ष घूमने वाली अक्ष के समानान्तर है ($\vec{\omega} = \omega \hat{k}$) 1 m द्रव्यमान वाले एक छोटे गुटके को समय $t = 0$ पर $\vec{r} = (R/2) \hat{i}$ बिंदु पर धीरे से इस तरह से रखा जाता है कि वो सिर्फ खाँचे में ही चल सके।



15. The distance r of the block at time t is

- (A) $\frac{R}{4}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$ (B) $\frac{R}{4} \cos \omega t$
 (C) $\frac{R}{4}(e^{2\omega t} + e^{-2\omega t})$ (D) $\frac{R}{2} \cos 2\omega t$

समय t पर गुटके की दूरी r का मान है :

- (A) $\frac{R}{4}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$ (B) $\frac{R}{4} \cos \omega t$
 (C) $\frac{R}{4}(e^{2\omega t} + e^{-2\omega t})$ (D) $\frac{R}{2} \cos 2\omega t$

Sol. A

$$m\omega^2 = mv \frac{dv}{dx}$$

$$\omega^2 x dx = v dv$$

$$v^2 = \omega^2 x^2 + C$$

$$\text{At } x = \frac{R}{2}, \quad v = 0$$

$$0 = \frac{\omega^2 R^2}{4} + C$$

$$C = -\frac{\omega^2 R^2}{4}$$

$$\therefore v^2 = \omega^2 x^2 - \frac{\omega^2 R^2}{4}$$

$$v = \omega \sqrt{x^2 - \frac{R^2}{4}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{x^2 - \frac{R^2}{4}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - R^2/4}} = \omega \int dt$$

On solving, we get option (A).

16. The net reaction of the disc on the block is
- (A) $\frac{1}{2} m\omega^2 R(e^{2\omega t} - e^{-2\omega t})\hat{j} + mg\hat{k}$ (B) $\frac{1}{2} m\omega^2 R(e^{\omega t} - e^{-\omega t})\hat{j} + mg\hat{k}$
 (C) $-m\omega^2 R \cos \omega t \hat{j} - mg\hat{k}$ (D) $m\omega^2 R \sin \omega t \hat{j} - mg\hat{k}$

गुटके पर डिस्क की नेट प्रतिक्रिया (net reaction) है:

- (A) $\frac{1}{2} m\omega^2 R(e^{2\omega t} - e^{-2\omega t})\hat{j} + mg\hat{k}$ (B) $\frac{1}{2} m\omega^2 R(e^{\omega t} - e^{-\omega t})\hat{j} + mg\hat{k}$
 (C) $-m\omega^2 R \cos \omega t \hat{j} - mg\hat{k}$ (D) $m\omega^2 R \sin \omega t \hat{j} - mg\hat{k}$

Sol. B

Net reacⁿ of the disc on the block is obtained by using

$$\vec{F}_{\text{rot}} = \vec{F}_{\text{in}} + 2m(\vec{v}_{\text{rot}} \times \vec{\omega}) + m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}$$

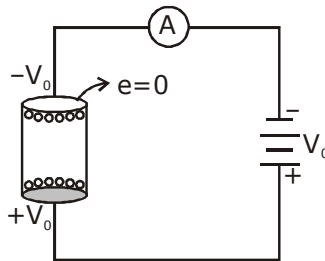
as

$$\frac{1}{2} m\omega^2 R(e^{\omega t} - e^{-\omega t})\hat{j} + mg\hat{k}$$

PARAGRAPH 2

Consider an evacuated cylindrical chamber of height h having rigid conducting plates at the end and an insulating curved surface as shown in the figure. A number of spherical balls made of a light weight and soft material and coated with a conducting material are placed on the bottom plated. The balls have a radius $r \ll h$. Now a high voltage source (HV) is connected across the conducting plates such that the bottom plate is at $+V_0$ and the top plate at $-V_0$. Due to their conducting surface, the balls will eventually collide with the top plate, where the plate and are repelled by it. The balls will eventually collide with the top plate, where the coefficient of restitution can be taken to be zero due to the soft nature the material of the balls. The electric field in the chamber can be considered to be that of a parallel plate capacitor. Assume that there are no collisions between the balls and the interaction between them is negligible. (Ignore gravity)

h ऊंचाई वाले निर्वातित (evacuated) एक बेलनाकार कक्ष के दोनों छोरों पर दो द्रव (rigid) चालक पट्टिकाएं हैं और उसका वक्रपट्ट अचालक है, जैसा की चित्र ममें दर्शाया गया है। कम भार वाली मुलायम पदार्थ से बनी हुयी कई गोलाकार गोलियों, जिनकी सतह पर एक चालक पदार्थ की परत चढ़ी है, नीचे वाली पट्टिका पर रखी हुई हैं। इन गोलियों की त्रिज्या $r \ll h$ है। अब एक उच्च वोल्टता का स्रोत (HV) इस तरह से जोड़ा जाता है कि नीचे वाली पट्टिका पर $+V_0$ एवं ऊपर वाली पट्टिका पर $-V_0$ का विभव आ जाता है। चालक परत के कारण गोलियाँ आवेशित होकर पट्टिका के साथ समविभव हो जाती है जिसके कारण वे पट्टिका से प्रतिकर्षित होती है। अंततोगत्वा गोलियाँ ऊपरी पट्टिका से टकराती है, जहाँ पर गोलियों के पदार्थ की मुलायम प्रकृति के कारण प्रत्यवस्थान गुणांक (coefficient of restitution) को शून्य लिया जा सकता है। कक्ष में विद्युत क्षेत्र को समानान्तर पट्टिका वाले संधारित्र के समान माना जा सकता है। गोलियों की एक दूसरे से पारस्परिक क्रिया एवं टकराव को नगण्य माना जा सकता है। (गुरुत्वाकर्षण नगण्य है।)

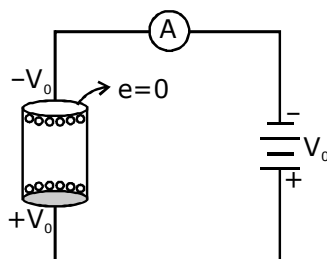


17. Which one of the following statements is correct?
 (A) The balls will stick to the top plate and remain there
 (B) The balls will bounce back to the bottom plate carrying the same charge they went up with
 (C) The balls will bounce back to the bottom plate carrying the opposite charge they went up with
 (D) The balls will execute simple harmonic motion between the two plates

निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है ?

- (A) गोलियाँ दोनों पट्टिकाओं के बीच सरल आवर्त गति निष्पाद करेंगी।
 (B) गोलियाँ ऊपरी पट्टिका पर चिपककर वहीं रह जाती हैं
 (C) गोलियाँ जिस आवेश के साथ ऊपर जाती हैं उसी आवेश के साथ उछलकर निचली पट्टिका पर वापस आ जाती है।
 (D) गोलियाँ जिस आवेश के साथ ऊपर जाती हैं उसके विपरीत आवेश के साथ उछलकर निचली पट्टिका पर वापस आ जाती है।

Sol. C



Balls placed on +ve plate become positive charge and move upward due to electric field. These balls on colliding with negative plate become negatively charged and move opposite to the direction of electric field.

18. The average current in the steady state registered by the ammeter in the circuit will be
 (A) zero
 (B) proportional to the potential V_0
 (C) proportional to $V_0^{1/2}$
 (D) proportional to V_0^2

परिपथ में लगाए अमीटर में स्थायी अवस्था में औसत धारा

- (A) V_0^2 के समानुपाती होगी
 (B) का मान शून्य होगा
 (C) $V_0^{1/2}$ के समानुपाती होगी
 (D) $V_0^{1/2}$ के समानुपाती होगी

Sol. D

$$F = qE = \frac{qV}{d}$$

$$ma = \frac{qV}{d}$$

$$a = \frac{qV}{md}$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{2}at^2$$

$$d = \frac{1}{2} \frac{qV}{md} t^2$$

$$t^2 \propto \frac{1}{qV}$$

$$\therefore q \propto V$$

$$t^2 \propto \frac{1}{V^2}$$

$$\Rightarrow t \propto \frac{1}{V}$$

$$\therefore i = \frac{q}{t}$$

$$i \propto V^2$$

[CHEMISTRY]

19. For the following electrochemical cell at 298 K,
 $\text{Pt(s)}|\text{H}_2(\text{g}, 1 \text{ bar})|\text{H}^+(\text{aq}, 1\text{M})||\text{M}^{4+}(\text{aq}), \text{M}^{2+}(\text{aq})|\text{Pt(s)}$

$$E_{\text{cell}} = 0.092 \text{ V when } \frac{[\text{M}^{2+}(\text{aq})]}{[\text{M}^{4+}(\text{aq})]} = 10^x$$

Given : $E_{\text{M}^{4+}/\text{M}^{2+}}^0 = 0.151 \text{ V}; 2.303 \frac{RT}{F} = 0.059 \text{ V}$

The value of x is

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

298 K पर निम्नलिखित वैद्युत-रासायनिक सेल (electrochemical cell),
 $\text{Pt(s)}|\text{H}_2(\text{g}, 1 \text{ bar})|\text{H}^+(\text{aq}, 1\text{M})||\text{M}^{4+}(\text{aq}), \text{M}^{2+}(\text{aq})|\text{Pt(s)}$

के लिये $E_{\text{cell}} = 0.092 \text{ V}$ जब $\frac{[\text{M}^{2+}(\text{aq})]}{[\text{M}^{4+}(\text{aq})]} = 10^x$

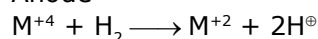
मान लीजिए कि: $E_{\text{M}^{4+}/\text{M}^{2+}}^0 = 0.151 \text{ V}; 2.303 \frac{RT}{F} = 0.059 \text{ V}$ तब

x का मान क्या होगा ?

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

Sol. D

Anode



$$E_{\text{cell}} = E_{\text{cell}}^0 - \frac{0.06}{2} \log \frac{[\text{M}^{2+}]}{[\text{M}^{4+}]}$$

$$0.092 = 0.151 - 0.03 \log \frac{\text{M}^{2+}}{\text{M}^{4+}}$$

$$= -0.06 = -0.03 \log_{10} \frac{[\text{M}^{2+}]}{[\text{M}^{4+}]}$$

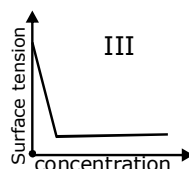
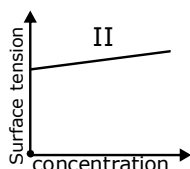
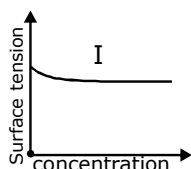
$$\frac{[\text{M}^{2+}]}{[\text{M}^{4+}]} = 10^2$$

[Given $\frac{[\text{M}^{2+}(\text{aq})]}{[\text{M}^{4+}(\text{aq})]} = 10^x$]

$$10^x = 10^2$$

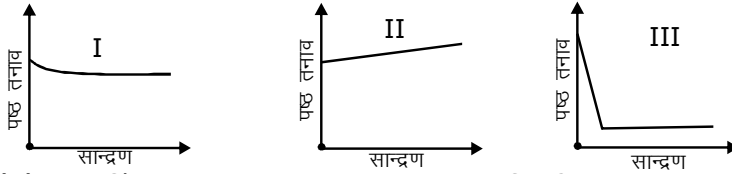
$$= x = 2$$

20. The qualitative sketches I, II and III given below show the variation of surface tension with molar concentration of three different aqueous solution of KCl, CH_3OH and $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{11}\text{OSO}_3^- \text{Na}^+$ at room temperature. The correct assignment of the sketches is



- | | | |
|---|--|---|
| (A) I : KCl | II : CH_3OH | III : $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{11}\text{OSO}_3^- \text{Na}^+$ |
| (B) I : $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{11}\text{OSO}_3^- \text{Na}^+$ | II : CH_3OH | III : KCl |
| (C) I : KCl | II : $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{11}\text{OSO}_3^- \text{Na}^+$ | III : CH_3OH |
| (D) I : CH_3OH | II : KCl | III : $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{11}\text{OSO}_3^- \text{Na}^+$ |

नीचे दिये गुणात्मक रेखाचित्र I, II तथा III सामान्य ताप पर KCl, CH₃OH तथा CH₃(CH₂)₁₁OSO₃⁻Na⁺ के तीन भिन्न जलीय विलयनों की मोलर सांद्रता (concentration) के साथ पष्ठ तनाव (Surface tension) के परिवर्तन को दर्शाते हैं। रेखाचित्रों का सही निर्दिष्टीकरण क्या है?

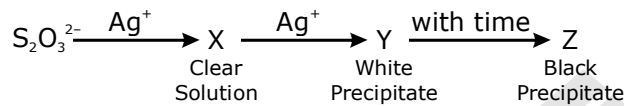


- (A) I : KCl
(B) I : CH₃(CH₂)₁₁OSO₃⁻Na⁺
(C) I : KCl
(D) I : CH₃OH
- II : CH₃OH
II : CH₃OH
II : CH₃(CH₂)₁₁OSO₃⁻Na⁺
II : KCl
- III : CH₃(CH₂)₁₁OSO₃⁻Na⁺
III : KCl
III : CH₃OH
III : CH₃(CH₂)₁₁OSO₃⁻Na⁺

Sol. D

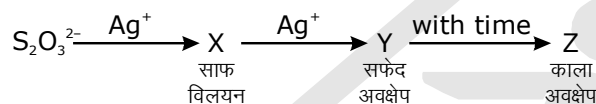
According to theory

21. In the following reaction sequence in aqueous solution, the species X, Y and Z, respectively, are



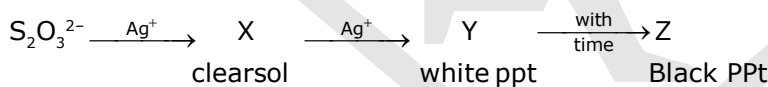
- (A) [Ag(S₂O₃)₂]³⁻, Ag₂S₂O₃, Ag₂S
(B) [Ag(S₂O₃)₃]⁵⁻, Ag₂SO₃, Ag₂S
(C) [Ag(SO₃)₂]³⁻, Ag₂S₂O₃, Ag
(D) [Ag(SO₃)₃]³⁻, Ag₂SO₄, Ag₂

जलीय विलयन में निम्नलिखित अभिक्रिया अभिक्रम में, स्पीशीज (species) X, Y तथा Z क्रमशः है:-



- (A) [Ag(S₂O₃)₂]³⁻, Ag₂S₂O₃, Ag₂S
(B) [Ag(S₂O₃)₃]⁵⁻, Ag₂SO₃, Ag₂S
(C) [Ag(SO₃)₂]³⁻, Ag₂S₂O₃, Ag
(D) [Ag(SO₃)₃]³⁻, Ag₂SO₄, Ag₂

Sol. A



$$\text{X} = [\text{Ag}(\text{S}_2\text{O}_3)_2]^{3-} \text{ clearsol.}$$

$$\text{y} = \text{Ag}_2\text{S}_2\text{O}_3 \text{ white ppt}$$

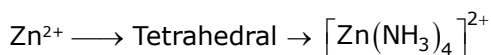
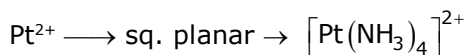
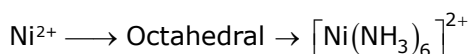
22. The geometries of the ammonia complexes of Ni²⁺, Pt²⁺ and Zn²⁺, respectively, are

- (A) octahedral, square planar and tetrahedral
(B) square planar, octahedral and tetrahedral
(C) tetrahedral, square planar and octahedral
(D) octahedral, tetrahedral and square planar

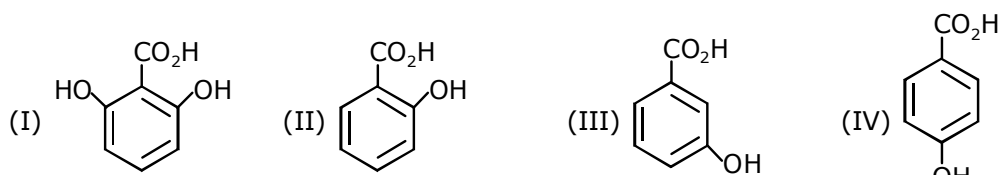
Ni²⁺, Pt²⁺ तथा Zn²⁺ के अमोनिया संकुलों की ज्यामितियाँ क्रमशः हैं

- (A) अष्टफलकीय, वर्ग समतली तथा चतुष्फलकीय
(B) वर्ग समतली, अष्टफलकीय तथा चतुष्फलकीय
(C) चतुष्फलकीय, वर्ग समतली तथा अष्टफलकीय
(D) अष्टफलकीय, चतुष्फलकीय तथा वर्ग समतली

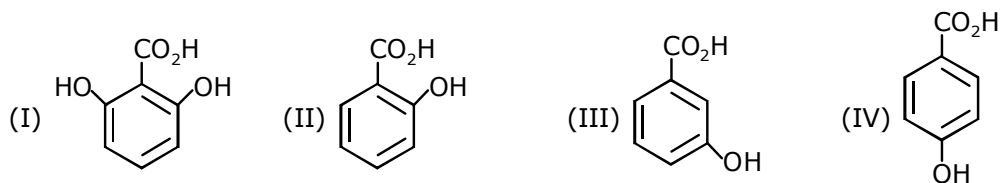
Sol. A



23. The correct order of acidity for the following compounds is

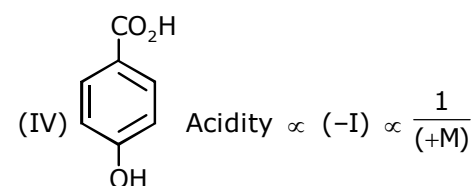
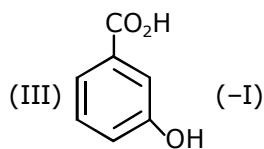
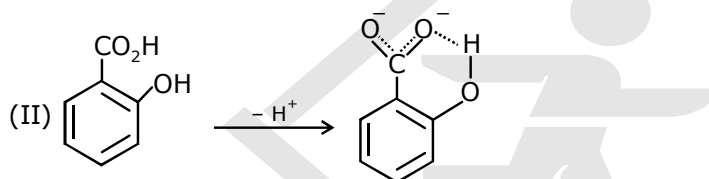
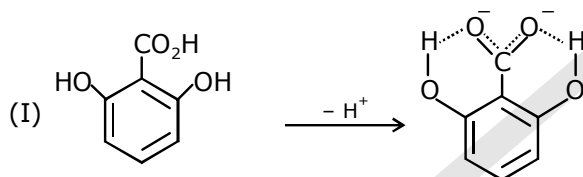


(A) I > II > III > IV (B) III > I > II > IV (C) III > IV > II > I (D) I > III > IV > II
निम्नलिखित यौगिकों की अम्लता का सही क्रम है

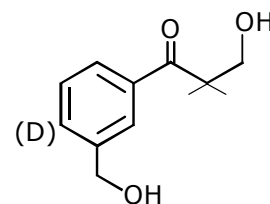
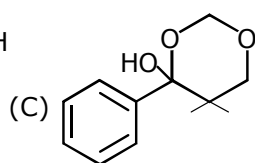
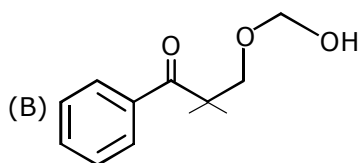
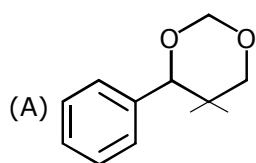
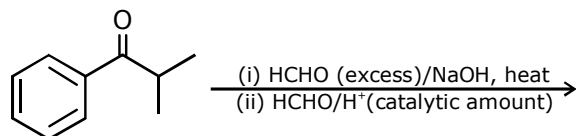


(A) I > II > III > IV (B) III > I > II > IV (C) III > IV > II > I (D) I > III > IV > II

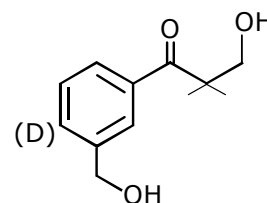
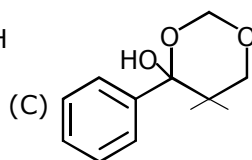
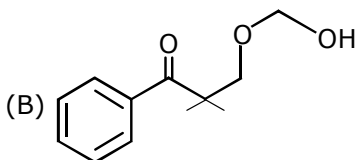
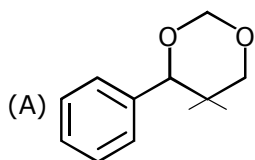
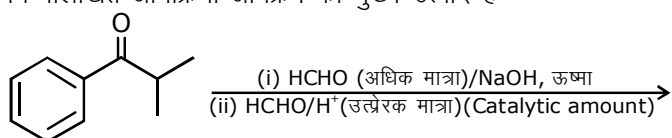
Sol. **A**



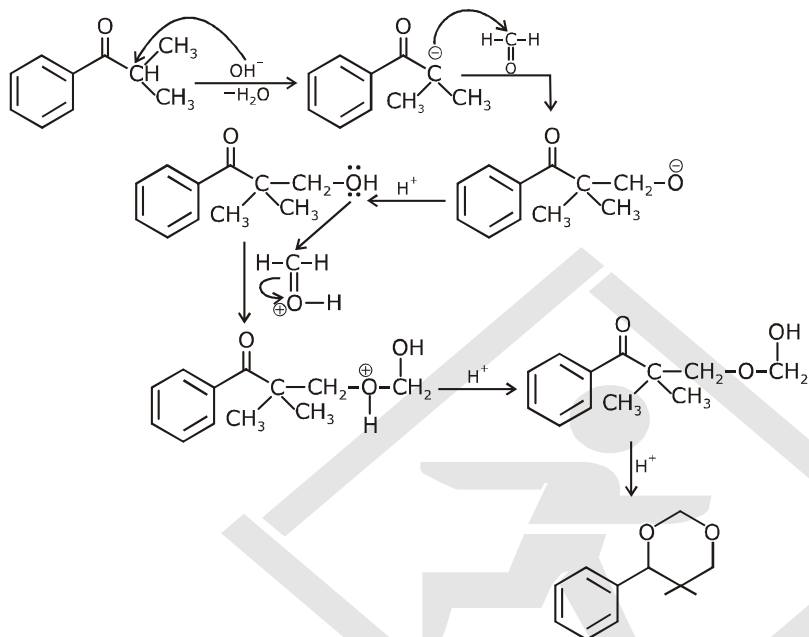
24. The major product of the following reaction sequence is



निम्नलिखित अभिक्रिया अभिक्रम का मुख्य उत्पाद है



Sol. A



25. According to Molecular Orbital Theory,
- (A) C_2^{2-} is expected to be diamagnetic
 - (B) O_2^{2+} is expected to have a longer bond length than O_2
 - (C) N_2^+ and N_2^- have the same bond order
 - (D) He_2^+ has the same energy as two isolated He atoms
- अणु कक्षक सिद्धान्त (Molecular Orbital Theory) के अनुसार

- (A) C_2^{2-} प्रत्याशित रूप से प्रतिचुम्बकीय (diamagnetic) है।
- (B) O_2^{2+} की आबंध लम्बाई (Bond length) प्रत्याशित रूप से O_2 की आबंध लम्बाई से लम्बी है।
- (C) N_2^+ तथा N_2^- की आबंध कोटि (Bond order) समान है।
- (D) He_2^+ की ऊर्जा दो एकल (isolated) He परमाणुओं की ऊर्जा के समान है।

Sol. A, C

According to M.O.T.
 C_2^{2-} does not have any unpaired electron
 N_2^+ & N_2^- has 2.5 (same B.O.) B.O.

26. Mixture(s) showing positive deviation from Raoult's law at $35^\circ C$ is(are)
- (A) carbon tetrachloride + methanol
 - (B) carbon disulphide + acetone
 - (C) benzene + toluene
 - (D) phenol + aniline
- मिश्रण जो $35^\circ C$ पर राउल्ट नियम (Raoult's law) से धनात्मक विचलन प्रदर्शित करता है (करते हैं)
- (A) कार्बन टेट्राक्लोराइड + मेथेनॉल
 - (B) कार्बन डाइसल्फाइड + एसीटोन
 - (C) बेन्जीन + टॉल्वीन
 - (D) फीनॉल + एनिलीन

Sol. A, B

27. The CORRECT statement(s) for cubic close packed (ccp) three dimensional structure is(are)
- (A) The number of the nearest neighbours of an atom present in the topmost layer is 12
 (B) The efficiency of atom packing is 74%
 (C) The number of octahedral and tetrahedral voids per atom are 1 and 2, respectively
 (D) The unit cell edge length is $2\sqrt{2}$ times the radius of the atom

घनीय निबिड संकुलित (cubic close packed) (ccp) त्रिविमीय संरचना के लिये सही कथन है/हैं

- (A) एक परमाणु जो सर्वोच्च परत (topmost layer) में उपस्थित है उसके निकटतम प्रतिवेशियों (पड़ोसियों) की संख्या 12 है।
 (B) परमाणु की संकुलन क्षमता 74% है
 (C) अष्टफलकीय तथा चतुष्फलकीय रिक्तियों की संख्या प्रति परमाणु क्रमशः 1 व 2 है
 (D) एक कोष्ठिका के कोर (unit cell edge) की लम्बाई परमाणु की त्रिज्या का $2\sqrt{2}$ गुना है।

Sol. **B, C, D**

$$A = 9$$

$$B = 74\%$$

C = O.V and T.V. per atom are 1 and 2 respectively

$$D = \Delta r = \sqrt{2} a$$

$$2 \times 2r = \sqrt{2} a$$

$$a = 2\sqrt{2} r$$

28. Extraction of copper from copper pyrite (CuFeS_2) involves
- (A) crushing followed by concentration of the ore by froth-flotation
 (B) removal of iron as slag
 (C) self-reduction step to produce 'blister copper' following evolution of SO_2
 (D) refining of 'blister copper' by carbon reduction

कॉपर पाइराइट (CuFeS_2) से कॉपर (ताँबा) के निष्कर्षण में क्या संलिप्त है (हैं)?

- (A) दलन तथा फेन-प्लवन (froth-flotation) द्वारा अयस्क का सान्द्रण
 (B) लोहे का धातुमल के रूप में निष्कासन
 (C) SO_2 निकास के पश्चात "फफोलेदार ताँबे" (blister copper) के उत्पाद के लिये स्व-अपचयन का पग
 (D) कार्बन अपचयन द्वारा "फफोलेदार ताँबे" (blister copper) का शोधन

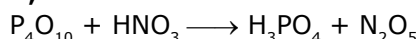
Sol. **A, B, C**

29. The nitrogen containing compound produced in the reaction of HNO_3 with P_4O_{10}
- (A) can also be prepared by reaction of P_4 and HNO_3
 (B) is diamagnetic
 (C) contains one N-N bond
 (D) reacts with Na metal producing a brown gas

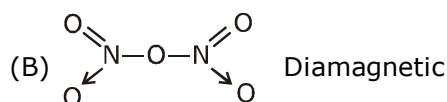
HNO_3 की P_4O_{10} के साथ अभिक्रिया में उत्पादित नाइट्रोजन अन्तर्विष्ट यौगिक

- (A) P_4 तथा HNO_3 की अभिक्रिया से भी बनाया जा सकता है
 (B) प्रतिचुम्बकीय (diamagnetic) है
 (C) में एक N-N बन्ध अन्तर्विष्ट है
 (D) Na धातु से अभिक्रिया कर एक भूरी (Brown) गैस उत्पादित करता है

Sol. **B, D**



Dehydrating agent

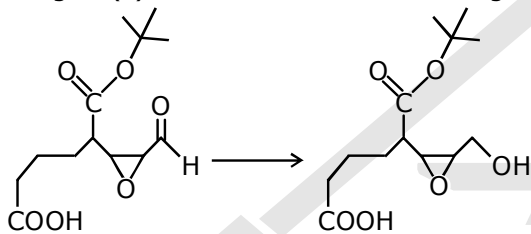


30. For 'invert sugar' the correct statement(s) is(are)
 (Given: specific rotations of (+)-sucrose, (+)-maltose, L(-)-glucose and L(+)-fructose in aqueous solution are $+66^\circ$, $+140^\circ$, -52° and $+92^\circ$, respectively)
 (A) 'invert sugar' is prepared by acid catalyzed hydrolysis of maltose
 (B) 'invert sugar' is an equimolar mixture of D-(+)-glucose and D-(-)-fructose
 (C) specific rotation of 'invert sugar' is -20°
 (D) on reaction with Br_2 water, 'invert sugar' forms saccharic acid as one of the products
 'अपवत शर्करा' ('invert sugar') के लिये सही कथन है/हैं
 (दिया है : (+)-सूक्रोज(sucrose), (+)-मॉल्टोज(maltose), L(-)- ग्लूकोज(glucose) तथा L(+)-फ्रुक्टोज (fructose) का जलीय विलयन में विशिष्ट ध्रुवण (specific rotations) क्रमशः $+66^\circ$, $+140^\circ$, -52° तथा $+92^\circ$ है)
 (A) 'अपवत शर्करा' मॉल्टोज के अम्ल-उत्प्रेरित (acid catalyzed) जल-अपघटन से (hydrolysis) बनाया जाता है
 (B) 'अपवत शर्करा' D-(+)-ग्लूकोज तथा D-(-)-फ्रुक्टोज का समअणुक (equimolar) मिश्रण है
 (C) 'अपवत शर्करा' का विशिष्ट ध्रुवण घूर्णन -20° है
 (D) Br_2 जल से अभिक्रिया करने पर 'अपवत शर्करा' उत्पादों में से एक उत्पाद के रूप में, सैकेरिक अम्ल (saccharic acid) बनाती है

Sol. B, C

According to theory

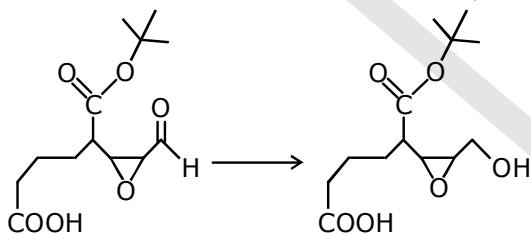
31. Reagent(s) which can be used to bring about the following transformation is (are)



- (A) LiAlH_4 in $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$
 (C) NaBH_4 in $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$

- (B) BH_3 in THF
 (D) Raney Ni/ H_2 in THF

निम्नलिखित रूपान्तरण के लिये किन अभिकारक(अभिकारको) (reagent(s)) का उपयोग किया जा सकता है(हैं) ?



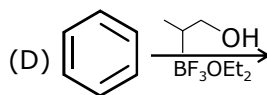
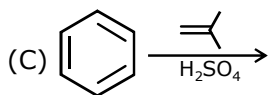
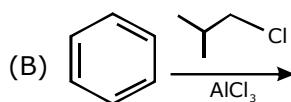
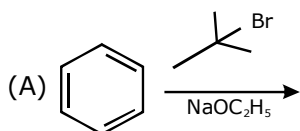
- (A) $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$ में LiAlH_4
 (C) $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ में NaBH_4

- (B) THF में BH_3
 (D) THF में राने (Raney) Ni/ H_2 में

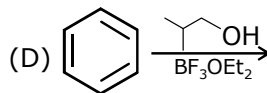
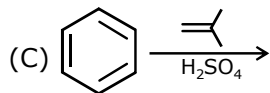
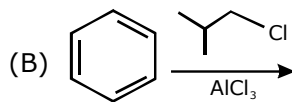
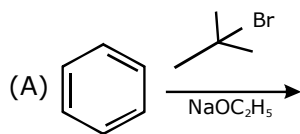
Sol. C

BH_3 in NaBH_4

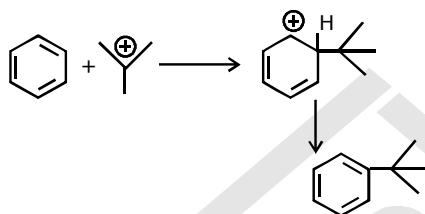
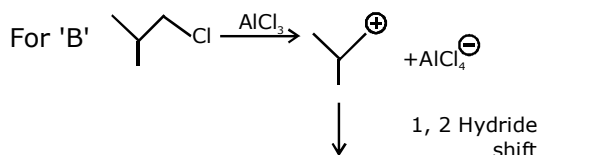
32. Among the following, reaction(s) which gives(give) tert-butyl benzene as the major product is (are)



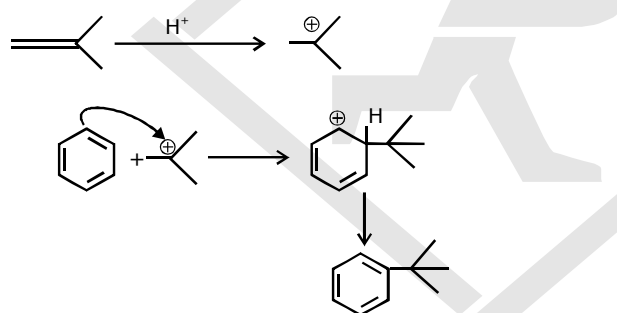
निम्नलिखित में टर्ट-ब्यूटिल बेन्जीन (tert-butyl benzene) मुख्य उत्पाद के रूप में देने वाली अभिक्रिया(ये) है (हैं)



Sol. B, C, D

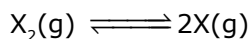


For 'C'



PARAGRAPH 1

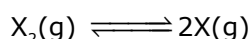
Thermal decomposition of gaseous X_2 to gaseous X at 298 K takes place according to the following equation :



The standard reaction Gibbs energy, $\Delta_r G^\circ$, of this reaction is positive. At the start of the reaction, there is one mole of X_2 and no X . As the reaction proceeds, the number of moles of X formed is given by β . Thus, $\beta_{\text{equilibrium}}$ is the number of moles of X formed at equilibrium. The reaction is carried out at a constant total pressure of 2 bar. Consider the gases to behave ideally. (Given : $R = 0.083 \text{ L bar K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$)

अनुच्छेद 1

298 K पर गैसीय (gaseous) X_2 का गैसीय X में ऊष्मा-अपघटन (thermal decomposition) निम्नलिखित समीकरण



के अनुसार होता है। इस अभिक्रिया की मानक अभिक्रिया गिब्स ऊर्जा (standard reaction Gibbs energy), $\Delta_r G^\circ$, धनात्मक है। अभिक्रिया के प्रारम्भ में X_2 का 1 मोल है तथा X नहीं है। जैसे-जैसे यह अभिक्रिया बढ़ती है, निर्मित X के मोलों की संख्या β द्वारा दी जाती है। इस प्रकार, साम्यावस्था पर निर्मित X के मोलों की संख्या $\beta_{\text{equilibrium}}$ है। अभिक्रिया 2 bar के स्थिर कुल दाब पर की जाती है। मान लें कि गैसों आदर्श व्यवहार करती है। (दिया गया है : $R = 0.083 \text{ L bar K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$)

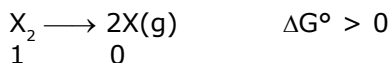
33. The equilibrium constant K_p for this reaction at 298 K, in terms of $\beta_{\text{equilibrium}}$ is

- (A) $\frac{8\beta_{\text{equilibrium}}^2}{2 - \beta_{\text{equilibrium}}}$ (B) $\frac{8\beta_{\text{equilibrium}}^2}{4 - \beta_{\text{equilibrium}}^2}$ (C) $\frac{4\beta_{\text{equilibrium}}^2}{2 - \beta_{\text{equilibrium}}}$ (D) $\frac{4\beta_{\text{equilibrium}}^2}{4 - \beta_{\text{equilibrium}}^2}$

298 K पर इस अभिक्रिया का $\beta_{\text{equilibrium}}$ के पद में साम्यावस्था स्थिरांक (equilibrium constant) K_p क्या होगा ?

- (A) $\frac{8\beta_{\text{equilibrium}}^2}{2 - \beta_{\text{equilibrium}}}$ (B) $\frac{8\beta_{\text{equilibrium}}^2}{4 - \beta_{\text{equilibrium}}^2}$ (C) $\frac{4\beta_{\text{equilibrium}}^2}{2 - \beta_{\text{equilibrium}}}$ (D) $\frac{4\beta_{\text{equilibrium}}^2}{4 - \beta_{\text{equilibrium}}^2}$

Sol. B



$$1 - \beta_{\text{eq}}/2 \quad \beta_{\text{eq}} \quad -RT \ln K_{\text{eq}} > 0$$

$$RT \ln K_{\text{eq}} < 0$$

$$2.303RT \log \left(\frac{\beta^2}{1 - \beta^2/2^2} \right) \cdot 2 < 0$$

$$k_p = \frac{2\beta^2}{1 - \beta^2/4} = \frac{8\beta_{\text{equilibrium}}^2}{4 - \beta_{\text{equilibrium}}}$$

34. The Incorrect statement among the following, for this reaction is

- (A) Decrease in the total pressure will result in formation of more moles of gaseous X
 (B) At the start of the reaction, dissociation of gaseous X_2 takes place spontaneously
 (C) $\beta_{\text{equilibrium}} = 0.7$
 (D) $K_c < 1$

इस अभिक्रिया के लिये निम्न में से असत्य कथन है

- (A) कुल दाब के घटने के परिणाम स्वरूप गैसीय X के अधिक मोल बनेंगे।
 (B) अभिक्रिया के प्रारम्भ में गैसीय X_2 का वियोजन स्वतः प्रवर्तित (spontaneous) होता है।
 (C) $\beta_{\text{equilibrium}} = 0.7$
 (D) $K_c < 1$

Sol. C

$$2.303 \times 0.083 \times 298 \log (k_p) < 0$$

$$\frac{8\beta^2}{4 - \beta^2} < 1$$

$$9\beta^2 < 4$$

$$\beta^2 < 4/9$$

$$\beta < 2/3$$

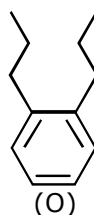
$$k_c \times RT < 1$$

$$K_c < 1/RT$$

$$K_c < 1$$

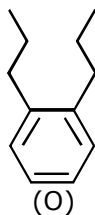
PARAGRAPH 2

Treatment of compound **O** with KMnO_4/H^+ gave **P**, which on heating with ammonia gave **Q**. The compound **Q** on treatment with Br_2/NaOH produced **R**. On strong heating, **Q** gave **S**, which on further treatment with ethyl 2-bromopropanoate in the presence of KOH followed by acidic tition, gave a compound **T**.

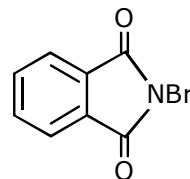
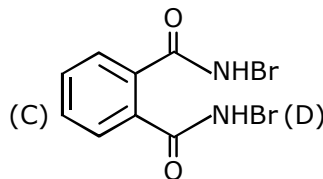
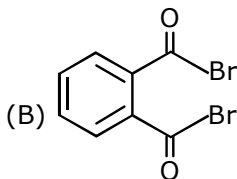
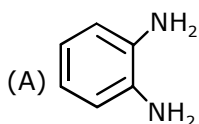


अनुच्छेद 2

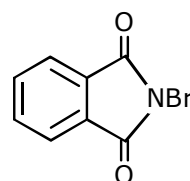
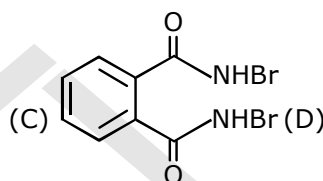
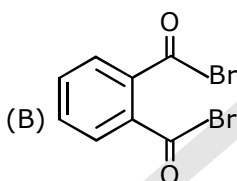
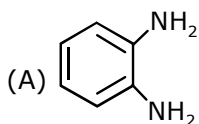
यौगिक **O** की KMnO_4/H^+ से क्रिया ने **P** दिया, जिसने अमोनिया के साथ गर्म करने पर **Q** दिया। यौगिक **Q** ने Br_2/NaOH के साथ क्रिया करने पर **R** उत्पादित किया। प्रबल रूप से गर्म करने पर **Q** ने **S** दिया जिसने एथिल 2-ब्रोमोप्रोपेनोएट (ethyl 2-bromopropanoate) के साथ KOH की उपस्थिति में आगे क्रिया की जिसके पश्चात् अम्लीकरण ने यौगिक **T** दिया।



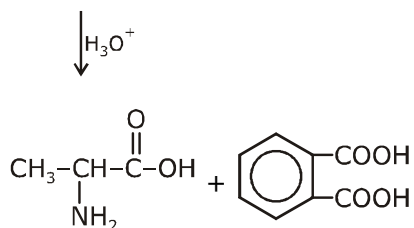
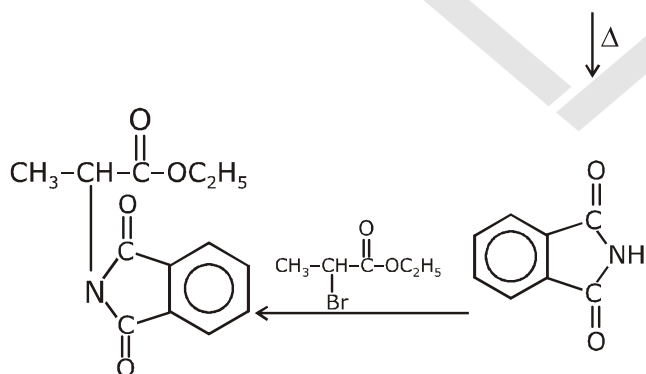
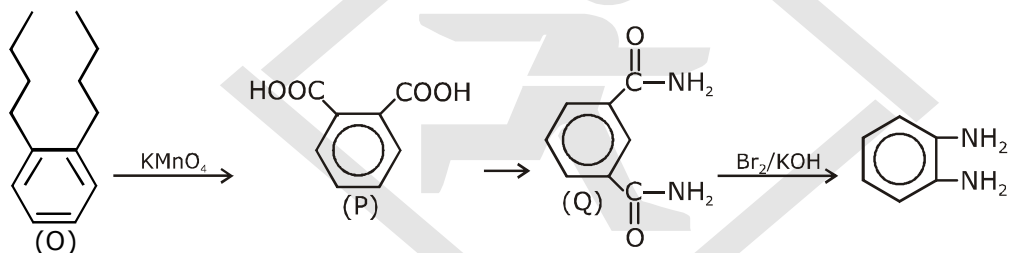
35. The compound R is



यौगिक R है



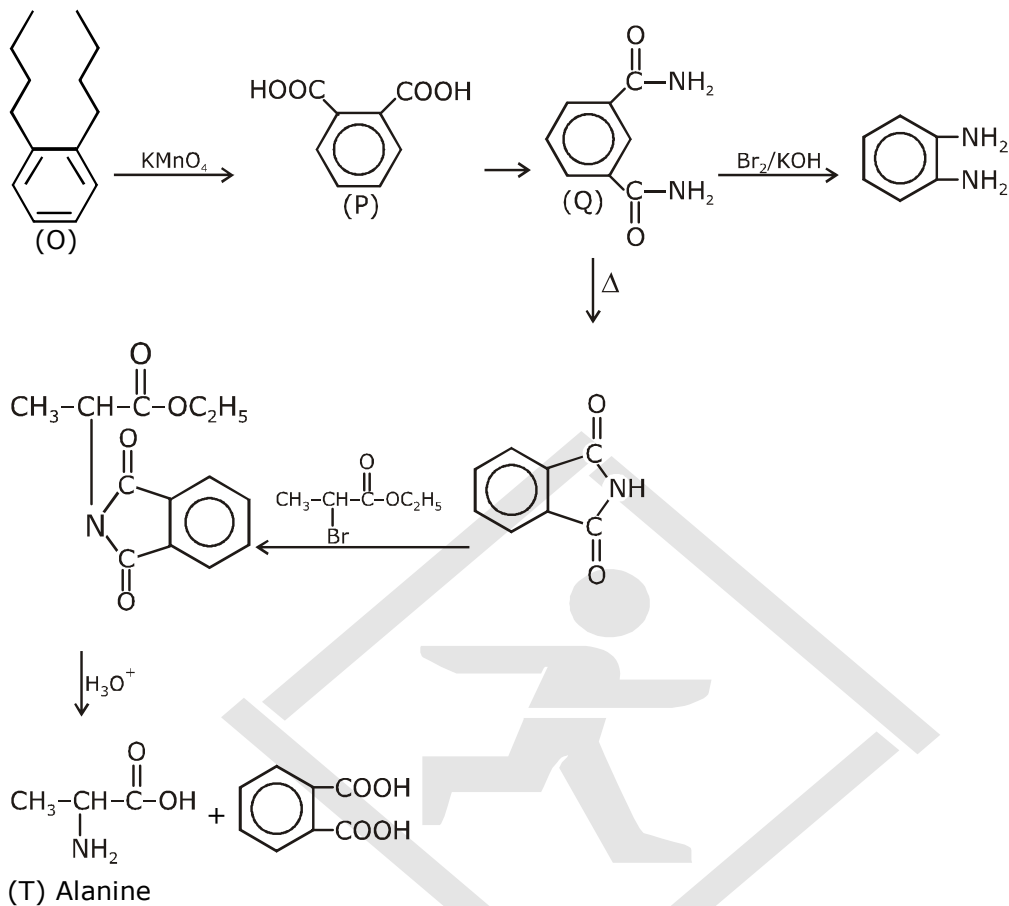
Sol. **A**



(T) Alanine

36. The compound T is
 (A) glycine (B) alanine (C) valine (D) serine
 यौगिक T है
 (A) ग्लाइसीन (B) एलानीन (C) वैलीन (D) सेरीन

Sol. B



[MATHEMATICS]

PART - III : MATHEMATICS

SECTION – I

Single Correct

37. Let $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ and I be the identity matrix of order 3. If $Q = [q_{ij}]$ is a matrix such that $P^{50} -$

$Q = I$, then $\frac{q_{31} + q_{32}}{q_{21}}$ equals

- (A) 52 (B) 103 (C) 201 (D) 205

37. माना कि $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ और I तीन कोटि (order 3) का तत्समक आव्यूह (identity matrix) है। यदि $Q = [q_{ij}]$ एक

आव्यूह इस प्रकार है कि $P^{50} - Q = I$ है, तब $\frac{q_{31} + q_{32}}{q_{21}}$ का मान है।

- (A) 52 (B) 103 (C) 201 (D) 205

Sol. **B**

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = [q_{ij}]$$

$$P^{50} - Q = I$$

$$Q = P^{50} - I$$

$$P = I + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} = I + 4R$$

$$P^{50} = [I + 4R]^{50} = I + 50(4R) + {}^{50}C_2(4R)^2 + \dots$$

$$\text{where } R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{50} - I = 50(4R) + \frac{50 \times 49}{2} \cdot 16R^2$$

$$= 200R + 19600R^2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 200 & 0 & 0 \\ 800 & 200 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 19600 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 200 & 0 & 0 \\ 20400 & 200 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q_{31} = 20400 \qquad q_{32} = 200 \qquad q_{21} = 200$$

$$\Rightarrow \frac{q_{31} + q_{32}}{q_{21}} = \frac{20400 + 200}{200} = \frac{206}{2} = 103$$

38. Let $b_i > 1$ for $i = 1, 2, \dots, 101$. Suppose $\log_e b_1, \log_e b_2, \dots, \log_e b_{101}$ are in Arithmetic Progression (A.P.) with the common difference $\log_e 2$. Suppose a_1, a_2, \dots, a_{101} are in A.P. such that $a_1 = b_1$ and $a_{51} = b_{51}$. If $t = b_1 + b_2 + \dots + b_{51}$ and $s = a_1 + a_2 + \dots + a_{51}$, then
 (A) $s > t$ and $a_{101} > b_{101}$ (B) $s > t$ and $a_{101} < b_{101}$
 (C) $s < t$ and $a_{101} > b_{101}$ (D) $s < t$ and $a_{101} < b_{101}$
38. माना कि $i = 1, 2, \dots, 101$ के लिए $b_i > 1$ है। मान लीजिए कि $\log_e b_1, \log_e b_2, \dots, \log_e b_{101}$ सार्वअंतर (common difference) $\log_e 2$ वाली समांतर श्रेणी (A.P.) में है। मान लीजिये कि a_1, a_2, \dots, a_{101} समांतर श्रेणी में इस प्रकार है कि $a_1 = b_1$ तथा $a_{51} = b_{51}$ यदि $t = b_1 + b_2 + \dots + b_{51}$ तथा $s = a_1 + a_2 + \dots + a_{51}$ हैं, तब
 (A) $s > t$ और $a_{101} > b_{101}$ (B) $s > t$ और $a_{101} < b_{101}$
 (C) $s < t$ और $a_{101} > b_{101}$ (D) $s < t$ और $a_{101} < b_{101}$

Sol. B

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_{101} \rightarrow \text{G.P. CR}=2$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{101} \rightarrow \text{A.P.}$$

$$a_1 = b_1 \dots (1) \quad a_{51} = b_{51} = b_1 \cdot 2^{50} \dots (2)$$

$$a_{51} = a_1 + 50d = b_1 \cdot 2^{50} \dots (3)$$

$$t = b_1 \frac{(1 - 2^{51})}{1 - 2} = b_1 (2^{51} - 1) = 50d$$

$$s = \frac{51}{2} [2a_1 + (50)d]$$

$$= \frac{51}{2} [2b_1 + (b_1 2^{50} - b_1)]$$

$$= \frac{51}{2} \left[2b_1 + \frac{2}{2} (2^{50} b_1 - b_1) \right]$$

$$s = \frac{51}{2} [2b_1 + 2b_1(2^{50} - 1)]$$

$$= \frac{51}{2} [b_1 + 2^{50} b_1] \Rightarrow \boxed{s > t}$$

now $a_{101} = a_1 + 100d$

$$= b_1 + 100 \left(\frac{b_1 2^{50} - b_1}{50} \right)$$

$$= b_1 (2^{51} - 1)$$

$$b_{101} = b_1 \cdot 2^{100}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{101} < b_{101}}$$

39. The value of $\sum_{k=1}^{13} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}\right)}$ is equal to

(A) $3 - \sqrt{3}$

(B) $2(3 - \sqrt{3})$

(C) $2(\sqrt{3} - 1)$

(D) $2(2 + \sqrt{3})$

39. $\sum_{k=1}^{13} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}\right)}$ का मान है

- (A) $3 - \sqrt{3}$ (B) $2(3 - \sqrt{3})$ (C) $2(\sqrt{3} - 1)$ (D) $2(2 + \sqrt{3})$

Sol. C

$$2 \sum_{k=1}^{13} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6} - \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{6}\right\}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}\right)}$$

$$2 \sum_{k=1}^{13} \cot\left(\frac{\pi}{4} + (k-1)\frac{\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}\right)$$

$$2 \left[\cot \frac{\pi}{4} - \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + \dots + \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{12\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{13\pi}{6}\right) \right]$$

$$2 \left[\cot \frac{\pi}{4} - \cot\left\{2\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right\} \right]$$

$$2 \left[1 - \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$2 \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} \right]$$

$$2 \left[1 - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \right]$$

$$2 \left[\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \right] = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = 2(\sqrt{3}-1)$$

40. The value of $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos x}{1+e^x} dx$ is equal to

- (A) $\frac{\pi^2}{4} - 2$ (B) $\frac{\pi^2}{4} + 2$ (C) $\pi^2 - e^{\pi/2}$ (D) $\pi^2 + e^{\pi/2}$

40. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos x}{1+e^x} dx$ का मान है।

- (A) $\frac{\pi^2}{4} - 2$ (B) $\frac{\pi^2}{4} + 2$ (C) $\pi^2 - e^{\pi/2}$ (D) $\pi^2 + e^{\pi/2}$

Sol. A

$$f(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2 \cos x}{1 + e^x} dx$$

$$f(x) = \int_{-\pi/2}^0 \frac{x^2 \cos x}{1 + e^x} + \int_0^{\pi/2} \frac{x^2 \cos x}{1 + e^x}$$

$$x = -t$$

$$dx = dt$$

$$f(x) = -\int_{\pi/2}^0 \frac{t^2 \cos t}{1 + e^{-t}} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{x^2 \cos x}{1 + e^x}$$

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$$

$$[x^2 \sin x]_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} x \sin x$$

$$\frac{\pi^2}{4} - 2 \left[-x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx \right]$$

$$\frac{\pi^2}{4} - 2[0 + 1]$$

$$\frac{\pi^2}{4} - 2$$

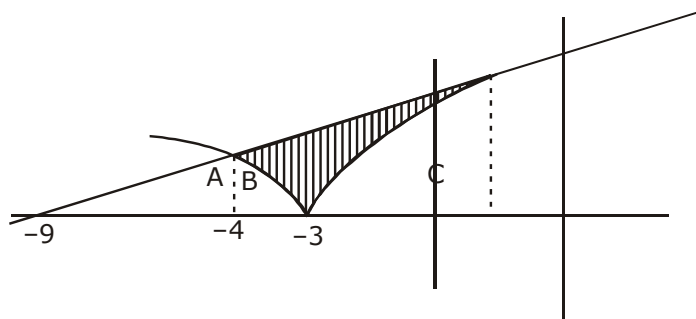
41. Area of the region $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{|x+3|}, 5y \leq x+9 \leq 15\}$ is equal to

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{3}$

41. क्षेत्र (region) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{|x+3|}, 5y \leq x+9 \leq 15\}$ का क्षेत्रफल (area) है

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{3}$

Sol. B



$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 - \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \right] - \int_{-4}^{-3} \sqrt{-(x+3)} dx - \int_{-3}^1 \sqrt{(x+3)}$$

$$\begin{aligned}
 &= 10 - \frac{5}{2} + \frac{2}{3}(-x+3)^{3/2} \Big|_{-4}^{-3} - \frac{2}{3}(x+3)^{3/2} \Big|_{-3}^1 \\
 &= 10 - \frac{5}{2} - \frac{2}{3}[0 - [1]] - \frac{2}{3}[8] - 0 \\
 &= \frac{15}{2} - \frac{2}{3} - \frac{16}{3} \\
 &= \frac{45 - 4 - 32}{6} = \frac{5}{2} \\
 &\frac{45 - 36}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

42. Let P be the image of the point (3, 1, 7) with respect to the plane $x - y + z = 3$. Then the equation of the plane passing through P and containing the straight line $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ is

(A) $x + y - 3z = 0$ (B) $3x + z = 0$ (C) $x - 4y + 7z = 0$ (D) $2x - y = 0$

42. माना कि बिन्दु (3, 1, 7) का, समतल $x - y + z = 3$ के सापेक्ष (with respect to), प्रतिबिम्ब (image) P है। तब बिन्दु P से गुजरने वाले और सरल रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ को धारण करने वाले समतल का समीकरण है।

(A) $x + y - 3z = 0$ (B) $3x + z = 0$ (C) $x - 4y + 7z = 0$ (D) $2x - y = 0$

Sol. C

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-7}{1} = \frac{-2(3-1+7-3)}{3}$$

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-7}{+1} = -2 \times 2 \quad x = 3 - 4, \quad y = 1 + 5, \quad z = 7 - 4$$

$$(-1, 5, 3)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(5 - 6) - y(-1 - 3) + z(-2 - 5) = 0$$

$$-x + 4y - 7z = 0$$

$$x - 4y + 7z = 0$$

43. Let $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n (x+n) \left(x + \frac{n}{2}\right) \dots \left(x + \frac{n}{n}\right)}{n! \left(x^2 + n^2\right) \left(x^2 + \frac{n^2}{4}\right) \dots \left(x^2 + \frac{n^2}{n^2}\right)} \right)^{\frac{x}{n}}$, for all $x > 0$. Then

(A) $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f(1)$

(B) $f\left(\frac{1}{3}\right) \leq f\left(\frac{2}{3}\right)$

(C) $f'(2) \leq 0$

(D) $\frac{f'(3)}{f(3)} \geq \frac{f'(2)}{f(2)}$

43. माना कि सभी $x > 0$ के लिए $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n (x+n) \left(x + \frac{n}{2}\right) \dots \left(x + \frac{n}{n}\right)}{n! \left(x^2 + n^2\right) \left(x^2 + \frac{n^2}{4}\right) \dots \left(x^2 + \frac{n^2}{n^2}\right)} \right)^{\frac{x}{n}}$ है। तब

- (A) $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f(1)$ (B) $f\left(\frac{1}{3}\right) \leq f\left(\frac{2}{3}\right)$ (C) $f'(2) \leq 0$ (D) $\frac{f'(3)}{f(3)} \geq \frac{f'(2)}{f(2)}$

Sol. B,C

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^n \prod \left(x + \frac{n}{r}\right)}{n! \prod \left(x^2 + \frac{n^2}{r^2}\right)} \right]^{\frac{x}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\prod \left(n + \frac{1}{r/n}\right)}{\prod \left(x^2 + \frac{n^2}{r^2}\right)} \right)^{\frac{x}{n}}$$

$$= \frac{x}{n} \left[\sum \ln \left(x + \frac{n}{(r/n)}\right) - \sum \ln \left(\frac{r}{n}\right) \sum \ln \left(x^2 + \frac{n^2}{r^2}\right) \right]$$

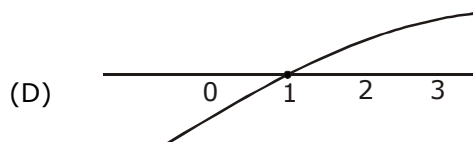
$$nf(x) = n \left[\int_0^1 \ln \left(x + \frac{1}{t}\right) dt - \int_0^1 \ln t dt - \sum \ln \left(x^2 + \frac{1}{t^2}\right) dt \right]$$

$$f(x) \times \left[\int_0^1 \ln(xt + 1) dt - \int_0^1 \ln(x^2 t^2 + 1) dt \right]$$

$$\ln f(x) \times \int_1^x \ln \left(\frac{1+z}{1+z^2}\right) dz$$

$$x(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)$$

$$\begin{cases} > 0 & 0 < x < 1 \\ < 0 & x > 1 \end{cases}$$



(C) $f'(2) = f(2) \ln \left(\frac{3}{5}\right) \leq 0$

$$f'(x) = f(x) \ln \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right) < 0$$

44. Let $a, b \in \mathbb{R}$ and $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by $f(x) = a \cos(|x^3 - x|) + b|x| \sin(|x^3 + x|)$. Then f is
- (A) differentiable at $x = 0$ if $a = 0$ and $b = 1$
 (B) differentiable at $x = 1$ if $a = 1$ and $b = 0$
 (C) **NOT** differentiable at $x = 0$ if $a = 1$ and $b = 0$
 (D) **NOT** differentiable at $x = 1$ and $a = 1$ and $b = 1$

44. मान कि $a, b \in \mathbb{R}$ और $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a \cos(|x^3 - x|) + b|x| \sin(|x^3 + x|)$ से परिभाषित है। तब f
- (A) $x = 0$ पर अवकलनीय (differentiable) है यदि $a = 0$ और $b = 1$
 (B) $x = 1$ पर अवकलनीय है यदि $a = 1$ और $b = 0$
 (C) $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है यदि $a = 1$ और $b = 0$
 (D) $x = 1$ पर अवकलनीय नहीं है यदि $a = 1$ और $b = 1$

Sol. A, B

$$f(x) = a \cos(|x|(|x^2 - 1|)) + b|x| \sin|x| |x^2 + 1|$$

$$a = 0 \quad b = 1 \quad f(x) = |x| \sin|x| |x^2 + 1|$$

$$a = 1 \quad b = 0 \quad f(x) = a \cos(|x| (|x^2 + 1|))$$

45. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ and $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be twice differentiable function such that f'' and g'' are continuous functions on \mathbb{R} . Suppose $f'(2) = g(2) = 0$, $f''(2) \neq 0$ and $g'(2) \neq 0$. If $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x)}{f'(x)g'(x)} = 1$, then
- (A) f has a local minimum at $x = 2$
 (B) f has a local maximum at $x = 2$
 (C) $f''(2) > f(2)$
 (D) $f(x) - f''(x) = 0$ for at least one $x \in \mathbb{R}$

45. माना $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ और $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ऐसे दो बार अवकलनीय (twice differentiable) फलन है कि \mathbb{R} पर f'' और g'' संतत (continuous) फलन है। मान लीजिए कि $f'(2) = g(2) = 0$, $f''(2) \neq 0$ और $g'(2) \neq 0$ है। यदि $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x)}{f'(x)g'(x)} = 1$ है, तब
- (A) $x = 2$ पर f का स्थानीय निम्नतम (local minimum) है
 (B) $x = 2$ पर f का स्थानीय उच्चतम (local maximum) है
 (C) $f''(2) > f(2)$
 (D) कम से कम एक $x \in \mathbb{R}$ के लिए $f(x) - f''(x) = 0$ है

Sol. A, D

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) ; g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(2) = g(2) = 0 ; f''(2) \neq 0 \quad g'(2) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x)}{f'(x)g'(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g'(x) + f'(x)g(x)}{f''(x)g'(x) + f'(x)g''(x)} = 1$$

$$\frac{f(2)g'(2)}{f''(2)g'(2)} = 1 \Rightarrow f''(2) = f(2)$$

46. let $f: \left[-\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow \mathbb{R}$ and $g: \left[-\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow \mathbb{R}$ be functions defined by $f(x) = [x^2 - 3]$ and $g(x) = |x| f(x) + |4x - 7| f(x)$, where $[y]$ denotes the greatest integer less than or equal to y for $y \in \mathbb{R}$. Then
- (A) f is discontinuous exactly at three points in $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$
- (B) f is discontinuous exactly at four points in $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$
- (C) g is **NOT** differentiable exactly at four points in $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$
- (D) g is **NOT** differentiable exactly at five points in $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

46. माना कि फलन $f: \left[-\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow \mathbb{R}$ और $g: \left[-\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x^2 - 3]$ और $g(x) = |x| f(x) + |4x - 7| f(x)$ से परिभाषित हैं, जहाँ $y \in \mathbb{R}$ के लिए y से कम या y के बराबर के महत्तम पूर्णांक (greatest integer less than or equal to y) को $[y]$ द्वारा दर्शाया गया है। तब
- (A) $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ में f ठीक तीन (exactly three) बिन्दुओं पर असंतत (discontinuous) है
- (B) $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ में f ठीक चार (exactly four) बिन्दुओं पर असंतत है
- (C) $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ में g ठीक चार (exactly four) बिन्दुओं पर अवकलनीय (differentiable) नहीं है
- (D) $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ में g ठीक पाँच (exactly five) बिन्दुओं पर अवकलनीय (differentiable) नहीं है

Sol. B,C

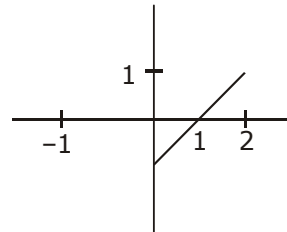
$$f: \left[-\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow \mathbb{R}; g: \left[-\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = [x^2 - 3]; g(x) = |x| f(x) + |4x - 7| f(x)$$

$$g(x) = |x| ([x^2 - 3]) + |4x - 7| ([x^2 - 3])$$

$$= \begin{cases} -x(-3) - (4x - 7)(-3) & ; -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ -3x + 3(4x - 7) & ; 0 \leq x < 1 \\ x(-2) + |4x - 7|(-2) & ; 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 15x + 7 \\ 9x \end{cases}$$



47. Let $a, b \in \mathbb{R}$ and $a^2 + b^2 \neq 0$. Suppose $S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{a+ibt}, t \in \mathbb{R}, t \neq 0 \right\}$; where $i = \sqrt{-1}$.

If $z = x + iy$ and $z \in S$, then (x, y) lies on

(A) the circle with radius $\frac{1}{2a}$ and centre $\left(\frac{1}{2a}, 0\right)$ for $a > 0, b \neq 0$

(B) the circle with radius $-\frac{1}{2a}$ and centre $\left(-\frac{1}{2a}, 0\right)$ for $a < 0, b \neq 0$

(C) the x-axis for $a \neq 0, b = 0$

(D) the y-axis for $a = 0, b \neq 0$

47. माना कि $a, b \in \mathbb{R}$ और $a^2 + b^2 \neq 0$ है। मान लीजिए कि $S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{a+ibt}, t \in \mathbb{R}, t \neq 0 \right\}$, जहाँ $i = \sqrt{-1}$ है। यदि

$z = x + iy$ और $z \in S$ है, तब (x, y)

(A) उस वक्त पर है जिसकी त्रिज्या $\frac{1}{2a}$ और केंद्र बिन्दु $\left(\frac{1}{2a}, 0\right)$ है जब $a > 0, b \neq 0$

(B) उस वक्त पर है जिसकी त्रिज्या $-\frac{1}{2a}$ और केंद्र बिन्दु $\left(-\frac{1}{2a}, 0\right)$ है जब $a < 0, b \neq 0$

(C) x-अक्ष पर है जब $a \neq 0, b = 0$

(D) y-अक्ष पर है जब $a = 0, b \neq 0$

Sol. A,C,D

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{a+bt} : t \in \mathbb{R} : t \neq 0 \right\}$$

$$z = x + iy$$

$$x + iy = \frac{a - bti}{a^2 + b^2t^2} \Rightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2t^2}$$

$$y = \frac{-bt}{a^2 + b^2t^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2t^2}{(a^2 + b^2t^2)^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{x}{a}$$

$$g = \frac{1}{2a}, f = 0, r = \sqrt{\frac{1}{4a^2}}$$

$$= \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{2a}, 0 \right)$$

48. Let P be the point on the parabola $y^2 = 4x$ which is at the shortest distance from the centre S of the circle $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 64 = 0$. Let Q be the point on the circle dividing the line segment SP internally. Then
- (A) $SP = 2\sqrt{5}$
- (B) $SQ : QP = (\sqrt{5} + 1) : 2$
- (C) the x-intercept of the normal to the parabola at P is 6
- (D) the slope of the tangent to the circle at Q is $\frac{1}{2}$

48. माना कि परवलय $y^2 = 4x$ पर P एक ऐसा बिन्दु है जो वृत्त $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 64 = 0$ के केन्द्र बिन्दु S से न्यूनतम दूरी पर है। माना कि वृत्त पर बिन्दु Q ऐसा है कि वह रेखाखंड SP को आंतरिक विभाजित करता है। तब
- (A) $SP = 2\sqrt{5}$
- (B) $SQ : QP = (\sqrt{5} + 1) : 2$
- (C) परवलय के बिन्दु P पर अभिलम्ब (normal) का x-अंतःखण्ड 6 है
- (D) वृत्त के बिन्दु Q पर स्पर्शरेखा की ढाल (slope) $\frac{1}{2}$ है

Sol. **A,C,D**

$$y^2 = 4x$$

let $P(x_1, y_1)$ then $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{2y} = \frac{2}{y_1}$

$$\Rightarrow m_{Nr} \text{ at } P = -\frac{y_1}{2} = \frac{y_1 - 8}{x_2 - 2}$$

$$\frac{y_1}{2} = \frac{8 - y_1}{y_1^2 - 8} \times 4$$

$$y_1^3 - 8y_1 = 64 - 8y_1$$

$$y_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 4$$

$$\Rightarrow P(4, 4)$$

now $SP = \sqrt{(4-2)^2 + (4-8)^2}$

$$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \text{(A) } \checkmark$$

& $SQ : QP = 2 : (2\sqrt{5} - 2)$

$$= 1 : (\sqrt{5} - 1)$$

$$= (\sqrt{5} + 1) : (4) \Rightarrow \text{(B) } \times$$

equation of Normal

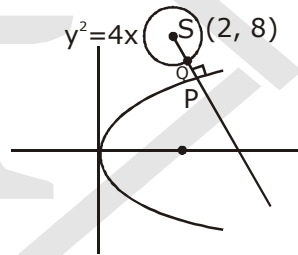
$$y - 4 = -2(x - 4)$$

$$y + 2x = 12$$

$$\Rightarrow x_{int} = 6 \Rightarrow \text{(C)}$$

Now tangent at Q will be \perp to the common normal $y + 2x = 12$ is slope of tangent will be $= \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \text{(D)}$$



49. Let $\alpha, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Consider the system of linear equations

$$ax + 2y = \lambda$$

$$3x - 2y = \mu$$

Which of the following statement(s) is(are) correct ?

- (A) If $\alpha = -3$, then the system has infinitely many solutions for all values of λ and μ
 (B) If $\alpha \neq -3$, then the system has a unique solution for all values of λ and μ
 (C) If $\lambda + \mu = 0$, then the system has infinitely many solutions for $\alpha = -3$
 (D) If $\lambda + \mu \neq 0$, then the system has no solutions for $\alpha = -3$

49. माना कि $\alpha, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ है। इन रैखिक समीकरणों के निकाय (system of linear equations) पर विचार कीजिए

$$ax + 2y = \lambda$$

$$3x - 2y = \mu$$

निम्नलिखित में से कौनसा कथन सही है?

- (A) यदि $\alpha = -3$, तब λ और μ के सभी मानों के लिए निकाय के अनन्त (infinitely many) हल हैं
 (B) यदि $\alpha \neq -3$, तब λ और μ के सभी मानों के लिए निकाय का अद्वितीय (unique) हल है
 (C) यदि $\lambda + \mu = 0$, तब $\alpha = -3$ के लिए निकाय के अनन्त हल हैं
 (D) यदि $\lambda + \mu \neq 0$, तब $\alpha = -3$ के लिए निकाय का कोई हल नहीं है

Sol. **B, C, D**

$$a, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$ax + 2y = \lambda$$

$$3x - 2y = \mu$$

$$(A) \alpha = -3$$

$$-3x + 2y = \lambda$$

$$3x - 2y = \mu$$

if $\lambda = -\mu \infty$ solution \Rightarrow (C)

If $\lambda \neq -\mu$ no solution \Rightarrow (D)

$$(B) \alpha \neq -3$$

$$ax + 2y = \lambda$$

$$3x - 2y = \mu$$

non parallel lines hence unique solution $\forall \lambda \& \mu$

50. Let $\hat{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$ be a unit vector in \mathbb{R}^3 and $\hat{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$. Given that there exists a

vector \hat{v} in \mathbb{R}^3 such that $|\hat{u} \times \hat{v}| = 1$ and $\hat{w} \cdot (\hat{u} \times \hat{v}) = 1$. Which of the following statement(s) is(are) correct ?

- (A) There is exactly one choice for such \hat{v}
 (B) There are infinitely many choices for such \hat{v}
 (C) If \hat{u} lies in the xy -plane then $|u_1| = |u_2|$
 (D) If \hat{u} lies in the xz -plane then $2|u_1| = |u_3|$

50. माना कि \mathbb{R}^3 में $\hat{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$ एक मात्रक सदिश (unit vector) है और $\hat{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ है। दिया हुआ है कि

\mathbb{R}^3 में सदिश \hat{v} का अस्तित्व इस प्रकार है कि $|\hat{u} \times \hat{v}| = 1$ और $\hat{w} \cdot (\hat{u} \times \hat{v}) = 1$ है। निम्नलिखित में से कौनसा कथन सही है?

- (A) इस प्रकार के \hat{v} के लिए ठीक एक (exactly one) चयन संभव है
 (B) इस प्रकार के \hat{v} के लिए अनन्त (infinitely many) चयन संभव हैं
 (C) यदि \hat{u} , xy -समतल पर है तब $|u_1| = |u_2|$ है
 (D) यदि \hat{u} , xz -समतल पर है तब $2|u_1| = |u_3|$ है

Sol. B,C

$$\hat{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$$

$$\hat{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$|\hat{u} + \hat{v}| = 1 \quad \hat{w} \cdot (\hat{u} + \hat{v}) = 1$$

$$|\hat{w}| |\hat{u} + \hat{v}| \sin Q \cos Q = 1$$

$$\cos Q = 1$$

$$\Rightarrow Q = 0^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{w} \text{ is } \perp \text{ to plane containing } \hat{u} \text{ and } \hat{v}$$

$$\text{B } \hat{w} \text{ is } \perp \text{ to } \hat{u} \text{ as well as } \hat{v}$$

Paragraph for Question Nos. 51 to 52

Football teams T_1 and T_2 have to play two games against each other. It is assumed that the outcomes of the two games are independent. The probabilities of T_1 winning, drawing and losing a game against T_2 are $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ and $\frac{1}{3}$, respectively. Each team gets 3 points for a win, 1 point for a drawn and 0 point for a loss in a game. Let X and Y denote the total points scored by teams T_1 and T_2 , respectively, after two games.

अनुच्छेद Question Nos. 51 to 52

फुटबॉल दलों T_1 और T_2 को एक दूसरे के विरुद्ध दो खेल (games) खेलने हैं। यह मान लिया गया है कि दोनों खेलों के परिणाम एक दूसरे पर निर्भर नहीं करते। दल T_1 के दल T_2 के विरुद्ध एक खेल में जीतने, बराबर होने और हारने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ और $\frac{1}{3}$ है। प्रत्येक दल जीतने पर 3 अंक, बराबरी पर 1 अंक और हारने पर 0 अंक अर्जित करता है। माना कि दो खेलों के पश्चात दल T_1 और दल T_2 के द्वारा अर्जित कुल अंक क्रमशः X और Y है।

51. $P(X > Y)$ is

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{7}{12}$

51. $P(X > Y)$ का मान है

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{7}{12}$

Sol. B

$$P(T_{1w}) = \frac{1}{2}, P(T_{1D}) = \frac{1}{6}, P(T_{1L}) = \frac{1}{3}$$

$$3 \quad 1 \quad 0$$

$$x > y \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1|2 \\ \hline T_1 \end{array}$$

$$P(W, WD) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{6+2}{12} \right)$$

$$= \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$P(D \text{ and } W) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow P(x > y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \Rightarrow \mathbf{B}$$

52. $P(X = Y)$ is

(A) $\frac{11}{36}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{13}{36}$ (D) $\frac{1}{2}$

52. $P(X = Y)$ का मान है

(A) $\frac{11}{36}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{13}{36}$ (D) $\frac{1}{2}$

Sol. **C**

$$x = y$$

for T_1

$$P(W, L) + P(L, W) + P(D, D)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right)$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{36} = \frac{13}{36}$$

Paragraph for Question Nos. 53 to 54

Let $F_1(x_1, 0)$ and $F_2(x_2, 0)$, for $x_1 < 0$ and $x_2 > 0$, be the foci of the ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$. Suppose a parabola having vertex at the origin and focus at F_2 intersects the ellipse at point M in the first quadrant and at point N in the fourth quadrant.

अनुच्छेद Question Nos. 53 to 54

माना कि $F_1(x_1, 0)$ और $F_2(x_2, 0)$ (जिसमें $x_1 < 0$, $x_2 > 0$) दीर्घवत्त (ellipse) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ की नाभियाँ (Foci) हैं।

माना कि एक परवलय (parabola) जिसका शीर्ष (vertex) मूलबिन्दु (origin) पर और नाभि (focus) F_2 पर है, दीर्घवत्त को प्रथम चतुर्थांश (first quadrant) में M पर और चतुर्थ चतुर्थांश (fourth quadrant) में N पर प्रतिच्छेदित करता है।

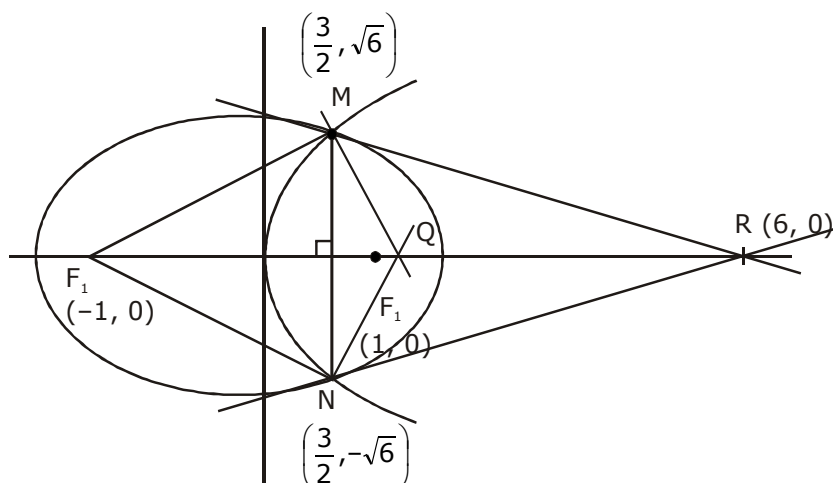
53. The orthocentre of the triangle F_1MN is

(A) $\left(-\frac{9}{10}, 0\right)$ (B) $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ (C) $\left(\frac{9}{10}, 0\right)$ (D) $\left(\frac{2}{3}, \sqrt{6}\right)$

53. त्रिभुज F_1MN का लंबकेन्द्र (orthocentre) है

(A) $\left(-\frac{9}{10}, 0\right)$ (B) $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ (C) $\left(\frac{9}{10}, 0\right)$ (D) $\left(\frac{2}{3}, \sqrt{6}\right)$

Sol. A



$$e^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

$$y^2 = \frac{8^2}{9}$$

$$e = \frac{1}{3}$$

$$y^2 = 4x$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{4x}{8} = 1$$

$$8x^2 + 36x = 72$$

$$2x^2 + 9x = 18$$

$$2x^2 + 9x - 18 = 0$$

$$(2x - 3)(x + 6) = 0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$m_{F_1N} = \frac{\sqrt{6}}{-\frac{5}{2}} = \frac{-2\sqrt{6}}{5}$$

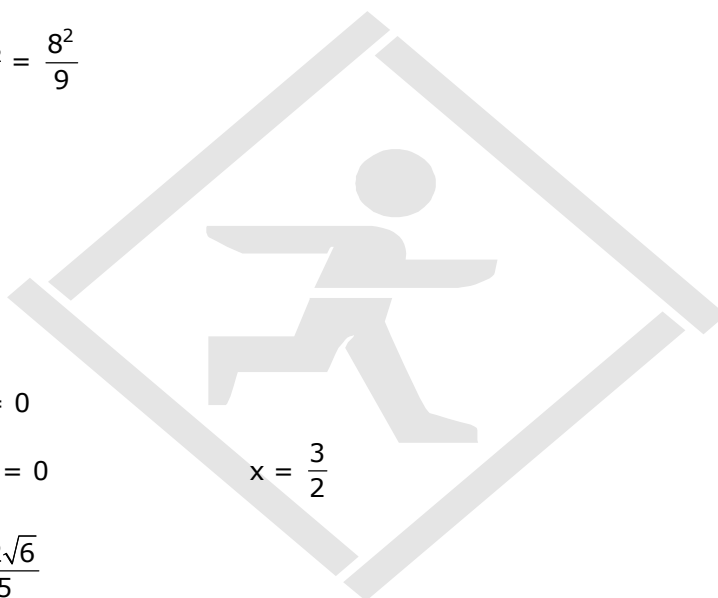
$$y - \sqrt{6} = \frac{5}{2\sqrt{6}} \left(x - \frac{3}{2} \right)$$

Put $y = 0$

$$-12 = 5x - \frac{15}{2}$$

$$5x = \frac{15}{2} - 12 = \frac{15 - 24}{2} = \frac{-9}{2}$$

$$x = -\frac{9}{10}$$



54. If the tangents to the ellipse at M and N meet at R and the normal to the parabola at M meets the x-axis at Q, then the ratio of area of the triangle MQR to area of the quadrilateral MF_1NF_2 is
 (A) 3 : 4 (B) 4 : 5 (C) 5 : 8 (D) 2 : 3
54. यदि दीर्घवत्त के बिन्दुओं M और N खींची गई पर स्पर्शरेखाएँ (tangents) R पर मिलती हैं और परवलय के बिन्दु M पर अभिलंब x-अक्ष को Q पर मिलता है, तब त्रिभुज MQR के क्षेत्रफल और चतुर्भुज (quadrilateral) MF_1NF_2 के क्षेत्रफल का अनुपात (ratio) है
 (A) 3 : 4 (B) 4 : 5 (C) 5 : 8 (D) 2 : 3

Sol. C

Eqⁿ to normal
 $y^2 = 4x$

$$2y \frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Eqⁿ to normal

$$y - \sqrt{6} = \frac{-\sqrt{6}}{2} (x - 3/2)$$

$$y = 0$$

$$-\sqrt{6} = -\frac{\sqrt{6}}{2} (x - 3/2)$$

$$2 + \frac{3}{2} = x$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$$Q = \left(\frac{7}{2}, 0\right)$$

$$\Delta_{MOR} = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \left(6 - \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{6} \times \frac{5}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{4}$$

$$\Delta_{MF_1NF_2} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{6} \left(\frac{5}{2}\right) - 2\sqrt{6} \times \frac{1}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} 2\sqrt{6} (2) = 2\sqrt{6}$$

$$\frac{\Delta_{MOR}}{\Delta_{MF_1NF_2}} = \frac{5\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = 5/8$$