MOTION

Nurturing potential through education

**Fastest Growing Institute of Kota (Raj.)**

**FOR JEE Advanced (IIT-JEE) | JEE Main (AIEEE) | AIPMT | CBSE | SAT | NTSE | OLYMPIADS**

# JEE MAIN + ADVANCED

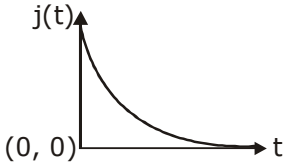
# EXAMINATION - 2016

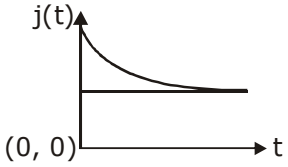
## QUESTION WITH SOLUTION

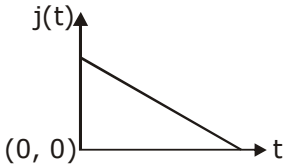
# PAPER CODE - 3

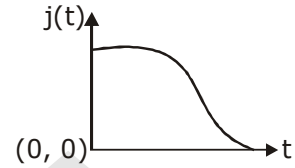
# [PHYSICS]

**1.** An infinite line charge of uniform electric charge density $\lambda$ lies along the axis of an electrically conducting infinite cylindrical shell of radius R, At time t = 0, the space inside the cylinder is filled with a material of permittivity $\varepsilon$ and electrical conductivity $\sigma$. The electrical conduction in the material follows Ohm's law. Which one of the following graphs best describes the subsequent variation of the magnitude of current density j(t) at any point in the material?

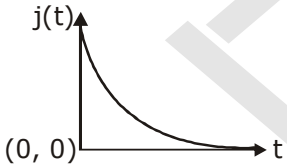
(A) 

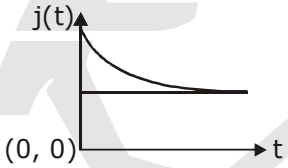

(B) 

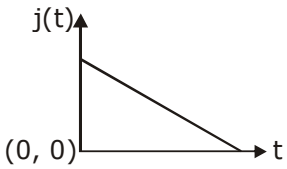

(C) 

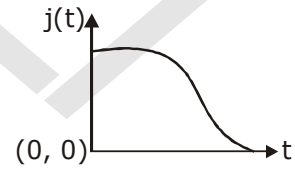

(D) 


**1.** एक बेलनाकार अनन्त विद्युतचालक कवच की त्रिज्या R है। बेलन के अक्ष पर एक अनन्त रेखीय विद्युत आवेश स्थित है। जिसका एक समान रेखीय घनत्व $\lambda$ है। बेलन के अन्दर की जगह को समय t = 0 पर एक पदार्थ से भरा जाता है, जिसका पराविद्युतांक $\varepsilon$ एवं विद्युतचालकता $\sigma$ है। पदार्थ में विद्युत आवेश की चालकता ओम् के नियम (Ohm's law) का पालन करती है। परावर्ती समय में पदार्थ में किसी भी बिन्दु पर विद्युत धारा घनत्व j(t) के परिमाण में परिवर्तन का सबसे अच्छा वर्णन कौनसा लेखाचित्र करता है?

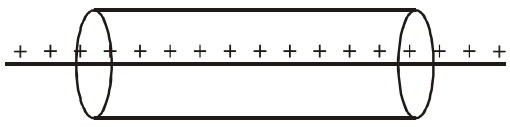
(A) 


(B) 

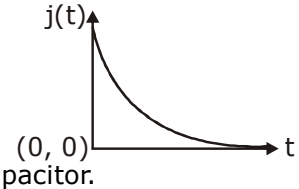

(C) 


(D) 


**Sol.** **A**




$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$




It is discharging of cylindrical capacitor.

**2.** In a historical experiment to determine Planck's constant, a metal surface was irradiated with light of different wavelengths. The emitted photoelectron energies were measured by applying a stopping potential ($V_0$) are given below :

(2)

| $\lambda(\mu m)$ | $V_0$ (Volt) |
|---|---|
| 0.3 | 2.0 |
| 0.4 | 1.0 |
| 0.5 | 0.4 |

Given that $c = 3 \times 10^8$ ms$^{-1}$ and $e = 1.6\times10^{-19}$ C, Planck's constant (in units of J s) found from such an experiment is

(A) $6.0\times10^{-34}$ (B) $6.4\times10^{-34}$ (C) $6.6\times10^{-34}$ (D) $6.8\times10^{-34}$

प्लांक स्थिरांक निकालने के लिए एक एतिहासिक प्रयोग में एक धातु की सतह से अलग–अलग तरंगदैर्ध्य के प्रकाश से प्रदीप्त किया गया। उत्सर्जित प्रकाशिक इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा को निरोधी विभव (stopping potential) लगाकर मापा गया। उपयोग में लाये गए आपतित की तरंगदैर्ध्य ($\lambda$) एवं सम्बन्धित निरोधी विभव ($V_0$) के आंकड़े नीचे दिये गए है :

(2)

| $\lambda(\mu m)$ | $V_0$ (Volt) |
|---|---|
| 0.3 | 2.0 |
| 0.4 | 1.0 |
| 0.5 | 0.4 |

प्रकाश की गति $c = 3 \times 10^8$ ms$^{-1}$ तथा इलेक्ट्रॉन का आवेश $e = 1.6\times10^{-19}$ C दिया गया है। इस प्रयोग से निकाले गए प्लांके स्थिरांक (Js मात्रक में) का मान है –

(A) $6.0\times10^{-34}$ (B) $6.4\times10^{-34}$ (C) $6.6\times10^{-34}$ (D) $6.8\times10^{-34}$

**Sol.** **B**

$C = 3 \times 10^8$ m/s

$e = 1.6 \times 10^{-19}$ C

$\lambda$ in $\mu$m

$E = \phi + eV$

$$\Rightarrow \quad \frac{hc}{\lambda_1} = \phi + eV_1$$

$$\frac{hc}{\lambda_2} = \phi + eV_2$$

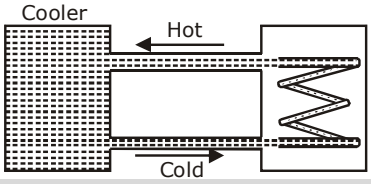
$$hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = eV_1 - eV_2$$

$$\Rightarrow \quad h \times 3\times10^8\left[\frac{1}{0.3\times10^{-6}} - \frac{1}{0.4\times10^{-6}}\right] = 1.6\times10^{-19}\,[2-1]$$

$$\Rightarrow \quad h \times 3\times10^8\left[\frac{0.4\times10^{-6} - 0.3\times10^{6}}{0.3\times0.4\times10^{-12}}\right] = 1.6\times10^{-19}$$

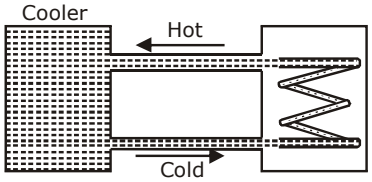
$$\Rightarrow \quad h = \frac{1.6\times10^{-9}}{3\times10^8\,(0.1\times10^{-6})} \times 0.12\times10^{-12} = 6.4\times10^{-34}\ \text{Js}$$

**3.** A water cooler of storage capacity 120 liters can cool water at a constant rate of P watts. In a closed circulation system (as shown schematically in the figure), the water from the cooler is used to cool an external device that generates constantly 3 kW of heat (thermal load). The temperature of water fed into the device cannot exceed 30° C and the entire stored 120 litres of water is initially cooled to 10 °C. The entire system is thermally insulated. The minimum value of P (in watts) for which the device can be operated for 3 hours is



(Specific heat of water is 4.2 kJ $kg^{-1}$ and the density of water is 1000 kg $m^{-3}$)
(A) 1600 (B) 2067 (C) 2533 (D) 3933

120 लीटर क्षमता वाला पानी का एक कूलर समान दर P watts से पानी को ठण्डा कर सकता है। एक बन्द परिसंचरण में (जैसा व्यवस्था चित्र में दर्शाया गया है।), कूलर के पानी से एक बाहरी यंत्र को ठण्डा किया जाता है। जो हमेशा 3 kW ऊष्मा उत्पन्न करता है। यंत्र को दिया गया पानी का तापमान 30° C से ज्यादा नहीं हो सकता एवं पूरा 120 लीटर पानी प्रारम्भ में 10 °C तक ठण्डा किया गया है। पूरा निकाय तापरोधी है। इस यंत्र को तीन घण्टे तक चालू रखने के लिये कम से कम कितनी शक्ति P (watts में) की जरूरत है?




(पानी की विशिष्ट ऊष्मा = 4.2 kJ $kg^{-1}$ और पानी का घनत्व = 1000 kg $m^{-3}$)
(A) 1600 (B) 2067 (C) 2533 (D) 3933

**Sol.** **B**

Rate of cooling = P watts
Thermal load = 3 kW
Capacity = 120 litres.
Initially cooled to 10°C
Max. Temp = 30°C
Time of operation = 3 hours
$Q = ms\Delta T$
$= 120 \times 4.2 \times 20 \times 10^3$
$= 10080000$
$= 10080 \times 10^3$ J
Heat = $3 \times 10^3 \times 3600 \times 3$
$= 32400 \times 10^3$
Heat extracted = $(32400 - 10080) \times 10^3 = 22320 \times 10^3$
Now :
$P \times 3 \times 3600 = 22320 \times 10^3$
$\Rightarrow$ P = 2067 Watts

**4.** A uniform wooden stick of mass 1.6 kg and length $\ell$ rests in an inclined manner on a smooth, vertical wall of height h($<\ell$) such that a small portion of the stick extends beyond the wall. The reaction force of the wall on the stick is perpendicular to the stick. The stick makes an angle of 30° with the wall and the bottom of the stick is on a rough floor. The reaction of the wall on the stick is equal in magnitude to the reaction of the floor on the stick. The ration $h/\ell$ and the frictional force f at the bottom of the stick are ($g = 10\ ms^{-2}$)

(A) $\frac{h}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{16}$, $f = \frac{16\sqrt{3}}{3}N$ (B) $\frac{h}{\ell} = \frac{3}{16}$, $f = \frac{16\sqrt{3}}{3}N$

(C) $\frac{h}{\ell} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$, $f = \frac{8\sqrt{3}}{3}N$ (D) $\frac{h}{\ell} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$, $f = \frac{16\sqrt{3}}{3}N$

1.6 kg द्रव्यमान और $\ell$ लम्बाई की एकसमान लकडी की एक डंडी एक चिकनी खड़ी दीवार, जिसकी ऊँचाई h($<\ell$) है, पर आनत तरीके से इस तरह से रखी गयी है कि डंडी का एक छोटा सा भाग दीवार से ऊपर निकला हुआ है। डंडी पर दीवार का प्रतिक्रिया बल डंडी के लम्बरूप में है। डंडी दीवार के साथ 30° का कोण बना रही है और डंडी का आधार एक घर्षण वाली जमीन पर है। दीवार से डंडी पर प्रतिक्रिया तथा जमीन से डंडी पर प्रतिक्रिया की मात्रा समान है। $h/\ell$ का अनुपात एवं डंडी के आधार पर घर्षण बल f है। ($g = 10\ ms^{-2}$)

(A) $\frac{h}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{16}$, $f = \frac{16\sqrt{3}}{3}N$ (B) $\frac{h}{\ell} = \frac{3}{16}$, $f = \frac{16\sqrt{3}}{3}N$

(C) $\frac{h}{\ell} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$, $f = \frac{8\sqrt{3}}{3}N$ (D) $\frac{h}{\ell} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$, $f = \frac{16\sqrt{3}}{3}N$

**Sol.** **D**

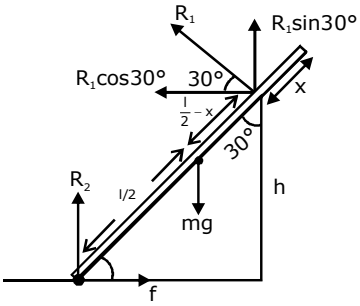
$$mg\frac{l}{2}\cos 60° = R_1(l-x)$$

$$\Rightarrow mg\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{2} = R_1(l-x)$$

$$\Rightarrow \frac{mgl}{4} = \frac{2}{3}(l-x)$$

$$\Rightarrow 3l = 8l - 8x$$

$$\Rightarrow x = \frac{5l}{8}$$




$$\cos 30° = \frac{h}{l-x}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{l-\frac{5l}{8}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{h}{l} = \frac{3\sqrt{3}}{16}}$$

$R_1 = R_2$ (given)

$R_1\cos 30° = f$

$$\frac{R_1}{2} + R_2 = mg$$

$$\frac{3R_1}{2} = mg$$

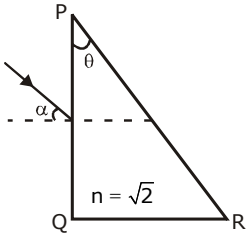
$$R_1 = \frac{2}{3}mg = R_2$$

$f = R_1\cos 30°$

$$\boxed{f = \frac{16}{\sqrt{3}}}$$

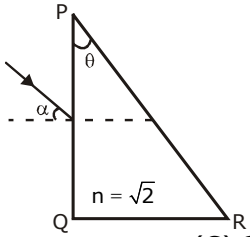
Note : Considering the reaction force to be Normal reaction only.

**5.** A parallel beam of light is incident from air at angle $\alpha$ on the side PQ of a right angled triangular prism of refractive index $n = \sqrt{2}$. Light undergoes total internal reflection in the prism at the face PR when $\alpha$ has a minimum value of 45°. The angle $\theta$ of the prism is



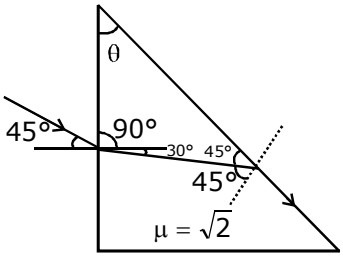

(A) 15° (B) 22.5°
(C) 30° (D) 45°

**5.** वायु से आती प्रकाश की एक समान्तर किरण–पुंज (parallel beam) एक समकोण त्रिभुजीय प्रिज्म (right angled triangular prism), जिसका अपवर्तनांक $n = \sqrt{2}$ है, के PQ तल पर $\alpha$ कोण से आपतित होती है। जब $\alpha$ का न्यूनतम मान 45° है तो प्रकाश का प्रिज्म की PR सतह पर पूर्ण आंतरिक परावर्तन (total internal reflection) होता है। प्रिज्म का कोण $\theta$ क्या होगा?




(A) 15° (B) 22.5° (C) 30° (D) 45°

**Sol. A**




$\sin\theta_c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$1 \sin 45° = \sqrt{2} \sin r$

$\frac{1}{2} = \sin r \qquad r = 30°$

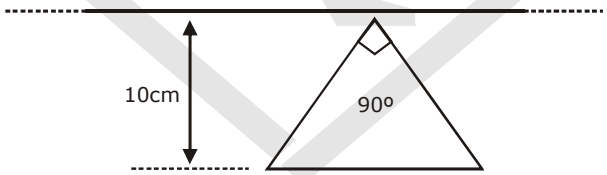
$\theta + 120° + 45° = 180°$

$\theta + 165° = 180°$

$\theta = 180° - 165° = 15°$

**6.** A conducting loop in the shape of a right angled isosceles triangle of height 10 cm is kept, such that the 90° vertex is very close to an infinitely long conducting wire (see the figure). The wire is electrically insulated from the loop. The hypotenuse of the triangle is parallel to the wire. The current in the triangular loop is in counterclockwise direction and increased at a constant rate of 10 $As^{-1}$. Which of the following statement(s) is (are) true?

एक समकोणीय त्रिकोण चालकीय फंदे की ऊँचाई 10 cm है एवं इसकी दो भुजाएं समान है। इस फंदे का समकोणीय बिंदु एक अनंत लम्बाई के चालकीय तार के बहुत नजदीक इस तरह से रखा गया है कि त्रिकोण का कर्ण चालकीय तार के समानान्तर है (जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है) तार तथा फंदा एक दूसरे से विद्युतरोधी है। त्रिकोणीय फंदे में धारा वामावर्त् दिशा में एक समान दर 10 $As^{-1}$ से बढ़ती है। निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/है ?




(A) The induced current in the wire is in opposite direction to the current along the hypotenuse.
(A) तार में प्रेरित कर्ण में धारा के विपरीत दिशा में है।

(B) There is a repulsive force between the wire and the loop.
(B) फंदे एवं तार के मध्य प्रतिकर्षी बल है।

(C) The magnitude of induced emf in the wire is $\left(\frac{\mu_0}{\pi}\right)$ volt

(C) तार में उन्पन्न emf का परिमाण $\left(\frac{\mu_0}{\pi}\right)$volt है

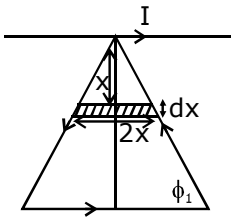
(D) If the loop is rotated at a constant angular speed about the wire, an additional emf of $\left(\frac{\mu_0}{\pi}\right)$ volt is induced in the wire.

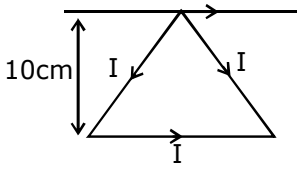
(D) यदि फंदे को एकसमान कोणीय गति से तार के अक्ष पर घुमाया जाता है तब तार में $\left(\frac{\mu_0}{\pi}\right)$ volt परिमाण का अतिरिक्त emf प्रेरित होता है।

**Sol.** **B,C**

$i = 10\ A/sec^{-1}$

(2xdx)




$$d\theta_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x}(2xdx)$$

$$8 = \frac{\mu_0}{\pi} i \int_0^{0.1} dx$$

$$= \frac{\mu_0 i}{\pi}(0.1)$$

$$e_1 = \frac{\mu_0 0.1}{\pi}\left(\frac{di}{dt}\right) = \frac{\mu_0}{\pi}$$

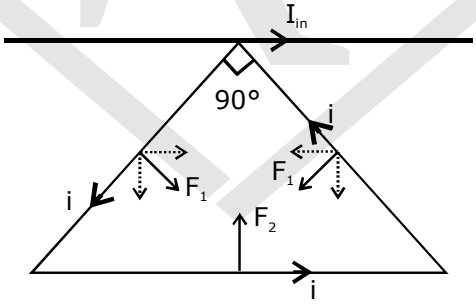
$$M = \frac{\frac{-\varepsilon_2}{di_1}}{dt} = \frac{\frac{-\varepsilon_1}{di_2}}{dt}$$

If we consider

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\mu_0}{\pi}$$

$\because$ Net force between the loop and the wire is repulsive




***7.*** A length-scale ($\ell$) depends on the permittivity ($\varepsilon$) of a dielectric material. Boltzman constant ($k_B$), the absolute temperature (T), the number per unit volume (n) of certain charged particles and the charge (q) carried by each of the particles. Which of the following expression(s) for $\ell$ is(are) dimensionally correct?

एक लंबाई माप ($\ell$) की निर्भरता, पराविद्युत पदार्थ के पराविद्युतांक ($\varepsilon$) बोल्टजमान स्थिरांक ($k_B$), परम ताप (T), एक आयतन में कुछ आवेशित कणों की संख्या (n) (संख्या घनत्व) तथा हर एक कण के आवेश (q) पर होती है। $\ell$ के लिए निम्नलिखित में से सही विमीयता वाला कौनसा/कौनसे सूत्र है/हैं?

(A) $l = \sqrt{\left(\frac{nq^2}{\varepsilon k_B T}\right)}$ (B) $l = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon k_B T}{nq^2}\right)}$ (C) $l = \sqrt{\left(\frac{q^2}{\varepsilon n^{2/3} k_B T}\right)}$ (D) $l = \sqrt{\left(\frac{q^2}{e n^{1/3} k_B T}\right)}$

**Sol.** **B,D**

$(\varepsilon) = M^{-1} L^{-3} T^4 A^2$

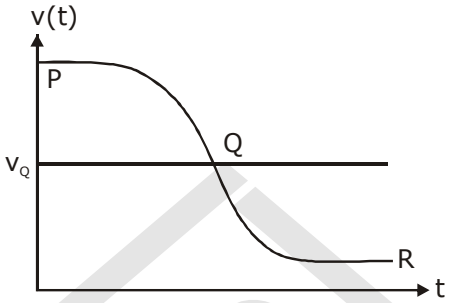
$[K_B T] = [E] = [M^1 L^2 T^{-2}]$

$n = [L^{-3}]$

$q = [A^1 T^1]$

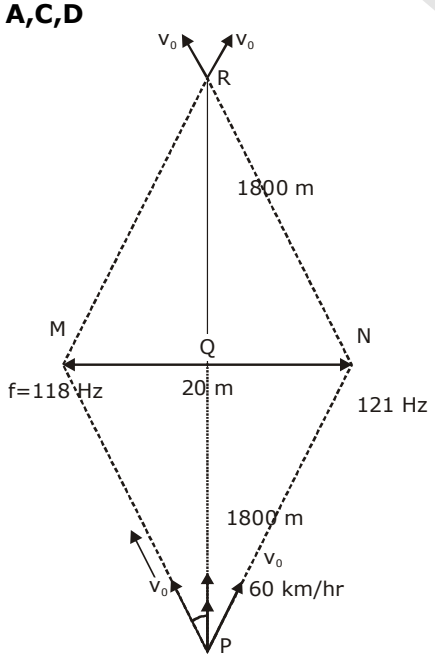
**8.** Two loudspeakers M and N are located 20 m apart and emit sound at frequencies 118 Hz an 121 Hz, respectively. A car is initially at a point P, 1800 m away from the midpoint Q of the line MN and moves towards Q constantly at 60 km/hr along the perpendicular bisector of MN. It crosses Q and eventually reaches a point R, 1800 m away from Q, Let v(t) represent the beat frequency measured by a person sitting in the car at time t. Let $v_P$, $v_Q$ and $v_B$ be the beat frequencies measured at locations P, Q and R, respectively. The speed of sound in air is 330 $ms^{-1}$. Which of the following statement(s) is (are) true regarding the sound heard by the person?

दो लाउडस्पीकर M एवं N जो कि एक दूसरे से 20 m की दूरी पर है, क्रमशः 118 Hz एवं 121 Hz की ध्वनि उत्सर्जित करते हैं, बिन्दु P रेखा MN के द्विभाजक लंब पर स्थित है तथा MN के मध्य बिन्दु Q से 1800 m की दूरी पर है। एक कार बिन्दु P से बिन्दु Q की तरफ 60 km/hr की स्थिति गति से चलना प्रारम्भ करती है। कार Q बिन्दु को पार कर अंततोगत्वा बिन्दु R के आगे चली जाती है, जहां बिन्दु R बिन्दु Q से 1800 m की दूरी पर है। कार में बैठा व्यक्ति समय t पर विस्पंद – आवति v(t) मापता है। बिन्दु P, Q,R पर विस्पंद – आवति क्रमशः $v_P$, $v_Q$, $v_R$ है। ध्वनि की हवा में गति 330 $ms^{-1}$ है। कार में बैठे व्यक्ति द्वारा सुनी गयी ध्वनि के बारे में निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?




(A) The plot below represents schematically the variation of beat frequency with time
(B) The plot below represents schematically the variation of beat frequency with time
(C) $v_P + v_R = 2v_Q$
(D) The rate of change in beat frequency is maximum when the car passes through Q
(A) नीचे दिखाया गया लेखाचित्र विस्पंद – आवति का समय के साथ परिवर्तन की व्यवस्था को दर्शाता है।
(B) नीचे दिखाया लेखाचित्र विस्पंद – आवति का समय के साथ परिवर्तन की व्यवस्था को दर्शातया है।
(C) $v_P + v_R = 2v_Q$
(D) जब कार Q बिन्दु को पार करती है तो विस्पंद – आवति की दर में अधिकतम परिवर्तन होता है।

**Sol. A,C,D**




$v_q = 221 - 218 = 3$ Hz

$f_{1P} = f_1\left(\frac{v + v_0}{v}\right)$ & $f_{2P} = f_2\left(\frac{v + v_0}{v}\right)$

& $f_{1Q} = f_1\left(\frac{v - v_0}{v}\right)$ & $f_{2Q} = f_2\left(\frac{v - v_0}{v}\right)$

So,

$\nu_p = f_{2P} - f_{1P}$

$\nu_R = f_{2R} - f_{1R}$

$\nu_P + \nu_R = (f_{2P} + f_{2R}) - (f_{1P} + f_{1R})$

$= f_2 (2) - f_1 (2)$

$= 2 (f_2 - f_1)$

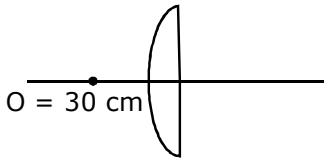
$= 2\nu_Q$

$\nu_P + \nu_R = 2\nu_Q$

**9.** A plano-convex lens is made of a material of refractive index n. When a small object is placed 30 cm away in front of the curved surface of the lens, an image of double the size of the object is produced. Due to reflection from the convex surface of the lens, another faint image observed at a distance of 10 cm away from the lens. Which of the following statement(s) is(are) true?
एक समतल – उत्तल लेंस के पदार्थ का अपवर्तनांक n है। जब एक छोटी वस्तु को लेंस वक्रप्रष्ट के सामने 30 cm की दूरी पर रखते हैं तो उस वस्तु की दुगुनी साइज का प्रतिबिम्ब बनता है। उत्तल प्रष्ट से परावर्तन के कारण लेंस से 10 cm की दूरी पर एक क्षीण प्रतिबिम्ब भी बनता है। निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य हैं?
(A) The refractive index of the lens is 2.5
(A) लेंस का अपवर्तनांक 2.5 है।
(B) The radius of curvature of the convex surface is 45 cm
(B) उत्तल प्रष्ट की वक्रता त्रिज्या 45 cm है।
(C) The faint image is erect and real
(C) क्षीण प्रतिबिम्ब वास्तविक एवं सीधा है।
(D) The focal length of the lens is 20 cm
(D) लेंस की फोकस दूरी 20 cm है।

**Sol.** **A,D**

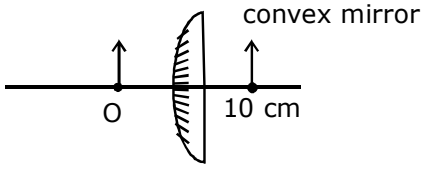
For reflection




$\frac{1}{f_m} = \frac{1}{10} - \frac{1}{30}$

$\Rightarrow f_m = 15$ cm $\Rightarrow R = 30$ cm

For lens




$m = -2 = \frac{v}{u} \Rightarrow v = 24 = 60$ cm

$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = + \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{f_2} = \frac{1}{60} + \frac{1}{30} \Rightarrow f_2 = 20$ cm

$\frac{1}{f_2} = (n - 1)\left(\frac{1}{R}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{20} = (n-1)\left(\frac{1}{30}\right)$

$\Rightarrow n = \frac{3}{2} + 1$

$\Rightarrow n = 2.5$

**10.** Highly excited states for hydrogen-like atoms (also called Rydberg states) with nucles charge Ze are defined by their principal quantum number n, where n>>1. Which of the following statement(s) is(are) true?

Ze नाभिकीय आवेश के हाइड्रोजन की तरह के परमाणु की अत्यधिक उत्तेजित अवस्था (जिसे रिड्बर्ग अवस्था भी कहते हैं) को उसके मुख्य कांटम अंक n (n>>1) से परिभाषित किया जाता है। निम्नलिखित में से कौनसॉ/कौनसे कथन सत्य है/हैं?

(A) Relative change in the radii of two consecutive orbitals does not depend on Z.

(A) दो क्रमागत कक्षों की त्रिज्या का आपेक्षित अंतर (Relative change)Z के ऊपर निर्भर नहीं करता है।

(B) Relative change in the radii of two consecutive orbitals varies as 1/n.

(B) दो क्रमागत कक्षों की त्रिज्या का आपेक्षित अंतर 1/n के समानुपात होता है।

(C) Relative change in the energy of two consecutive orbitals varies as $1/n^3$.

(C) दो क्रमागत कक्षा की ऊर्जा का आपेक्षित अंतर $1/n^3$ के समानुपात होता है।

(D) Relative change in the angular momenta of two consecutive orbitals varies as 1/n.

(D) दो क्रमागत कक्षों के कोणीय संवेग का आपेक्षित अंतर 1/n के समानुपात होता है।

**Sol.** **A,B,D**

orbital :

& $\frac{\Delta r}{r}$ = relative change

$r_n = 0.529\frac{n^2}{Z}$

$= \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2}$

$= \frac{n^2 + 1 + 2n - n^2}{n^2}$

$= \frac{1}{\infty} + \frac{2n}{n^2}$

$= \frac{1}{n}$ $\therefore$ dependent on n.

$E_n = -13.6\frac{z^2}{n^2}$

Relative change $= \frac{\Delta E}{E}$

$= \frac{\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}$

$= \frac{n^2 - n^2 - 1 - 2n}{n^2(n+1)^2} \times \frac{n^2}{1}$

$\Rightarrow \frac{-(1+2n)}{(n+1)^2}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1+2n}{n^2+1+2n}$

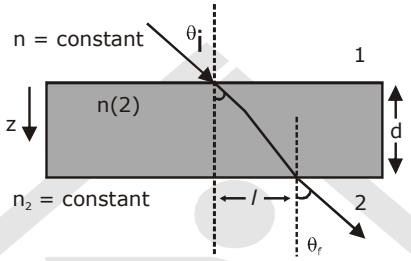
$= \dfrac{1}{n^2+1+2n} + \dfrac{2n}{n^2+1+2n}$

Doesn't match with 'C'

$L_n = \dfrac{nh}{2\pi}$

Relative change = $\dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{n-(n-1)}{n} = \dfrac{1}{n}$

**11.** A transparent slab of thickness d has a refractive index n(z) that increases with z. Here z is the vertical distance inside the slab, measured from the top. The slab is placed between two media with uniform refractive indices $n_1$ and $n_2$ ($>n_1$), as shown in the figure. ray of light is incident with angle $\theta_2$ from medium 1 and emerges in medium 2 with refraction angle $\theta_f$ with a lateral displacement l.

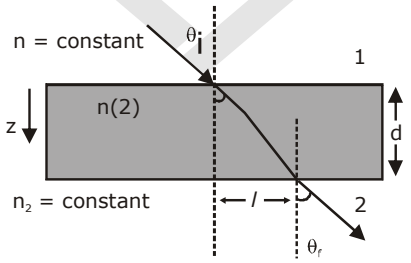



Which of the following statement(s) is(are) true?

(A) $\ell$ is independent of $n_2$ (B) $\ell$ is dependent on n(z)

(C) $n_1 \sin\theta_2 = n_2 \sin\theta_f$ (D) $n_1 \sin\theta_l = (n_2 - n_1)\sin\theta_f$

**11.** 'd' मोटाई के एक पारदर्शी पट्ट का अपवर्तनांक n(z) का मान z बढ़ाने से बढ़ता है। यहाँ z पट्ट के अन्दर ऊपरी सतह से मापी गयी ऊर्ध्वाधर दूरी है। पट्ट को दो माध्यमों के बीच रखा गया है जिनके एक समान (uniform) अपवर्तनांक $n_1$ एवं $n_2(>n_1)$ है, जैसा की चित्र में दर्शाया गया है। यहाँ $n_1$ और $n_2$ स्थिर (constant) है। प्रकाश की एक किरण माध्यम 1 से पट्ट पर $\theta_i$ कोण से आपतित है तथा माध्यम 2 में पार्श्विक विस्थापन (lateral displacement) l से अपवर्तनांक कोण $\theta_f$ पर निकसित होती है।




निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?

(A) $\ell$ का मान $n_2$ पर निर्भर नहीं करता है। (B) $\ell$ का मान n(z) पर निर्भर करता है।

(C) $n_1 \sin\theta_2 = n_2 \sin\theta_f$ (D) $n_1 \sin\theta_l = (n_2 - n_1)\sin\theta_f$

**Sol. A,B,C**

(A) l is independent of $n_2$.

(B) l is dependent on n (z) as the lateral displacement varies as z varies.

(C) This is always true

$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_f$

**12.** An incandesecent bulb has a thin filament of tungstgen that is heated to high temperature by passing an electric current. The hot filament emits black - body radiation. The filament is observed to break up at random location after a sufficiently long time of operation due to non - uniform evaporation of tungsten from the filament. If the bulb is powered at constant voltage, Which of the following statement(s) is(are) true?
एक तापदीप्त बल्ब के तन्तु को विद्युत धारा के प्रवाह से उच्च तापमान पर गरम करने पर टंगस्टन तन्तु कष्णिका विकिरण (black-body radiation) उत्सर्जित करता है। यह देखा गया है कि लंब समय के प्रयोग के बाद टंगस्टन तन्तु में असमान वाष्पीकरण के कारण तन्तु किसी भी जगह से टूट जाता है। यदि बल्ब को विद्युत शक्ति एक स्थिर वोल्टता पर दी गयी है तो निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं ?
(A) The temperature distribution over the filament is uniform
(A) तन्तु पर तापमान का वितरण एक समान है।
(B) The resistance over small sections of the filament decreases with time
(B) तन्तु के छोंटे भागों का प्रतिरोध समय के साथ कम होता है
(C) The filament emits more light at higher band of frequencies before it breaks up
(C) टूटने से पहले तन्तु उच्च आवती पट्टी (high frequency band) का प्रकाश पहले से ज्यादा उत्सर्जित करता है
(D) The filament consumes less electrical power towards the ends of the life of the bulb
(D) तन्तु अपनी आयु के आखरी समय में कम विद्युत शक्ति का प्रयोग करता है।

**Sol.** **C,D**
As the temperature increases, $\lambda_m$ decreases. So frequency of radiation increases with increase in temperature and resistance increases. So current decreases and hence power consumed (P = Vi) decreases (V is constant given)

**13.** The position vector $\vec{r}$ of a particle of mass m is given by the following equation $\vec{r}(t) = at^3\hat{i} + \beta t^2\hat{j}$, where $\alpha = 10/3\ ms^{-3}$, $\beta = 5\ ms^{-2}$ and m = 0.1 kg. At t = 1 s, which of the following statement (s) is (are) true about the particle?

(A) The velocity $\vec{\upsilon}$ is given by $\vec{\upsilon} = (10\hat{i} + 10\hat{j})\ ms^{-1}$

(B) The angular momentum $\vec{L}$ with respect to the origin is given by $\vec{L} = -(5/3)\hat{k}$ N m s

(C) The force $\vec{F}$ is given by $\vec{F} = (\hat{i} + 2\hat{j})N$

(D) The torque $\vec{r}$ with respect to the origin is given by $\vec{r} = -(20/3)\hat{k}$ Nm

**13.** m द्रव्यमान के एक कण का स्थिति–सदिश $\vec{r}$ नीचे समीकरण में दिया गया है $\vec{r}(t) = at^3\hat{i} + \beta t^2\hat{j}$, जिसमें $\alpha = 10/3\ ms^{-3}$, $\beta = 5\ ms^{-2}$ एवं m = 0.1 kg है। समय t = 1 s पर, निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?

(A) वेग का मान $\vec{\upsilon} = (10\hat{i} + 10\hat{j})\ ms^{-1}$ है।

(B) मूल बिन्दु के गिर्द कोणी संवेग का मान $\vec{L} = -(5/3)\hat{k}$ N m s है।

(C) बल का मान $\vec{F} = (\hat{i} + 2\hat{j})N$ है।

(D) मूल बिन्दु के गिर्द घूर्णन का मान $\vec{r} = -(20/3)\hat{k}$ Nm है।

**Sol.** **ABD**

$r(t) = \alpha t^3\hat{i} + \beta t^2\hat{j}$

Given, $\alpha = 10/3\ m/s^3$, $\beta = 5\ m/s^2$, m = 0.1 kg; at t = 1 s

$\vec{v} = \alpha(3t^2)\hat{i} + 2\beta t\hat{j}$

$\vec{v} = (10\hat{i} + 10\hat{j})$

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = 6\alpha t\hat{i} + 2\beta\hat{j}$

$\vec{F} = m\vec{a} = 0.1\ [6\alpha t\hat{i} + 2\beta\hat{j}]$

$= 2\hat{i} + \hat{j}$

$m(\vec{r} \times \vec{v})$

$\vec{l} = -\frac{5}{3}\ \hat{k}$ Nms

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$= (\alpha t^3\hat{i} + \beta t^2\hat{j}) \times m\ (6\alpha t\hat{i} + 2\beta t\hat{j})$

$= m\ (2\alpha\beta t^3\hat{k} - 6\alpha\beta t^3\hat{k})$

$= \frac{-20}{3}\hat{k}$ Nm

**14.** The isotope $^{12}_{5}B$ having a mass 12.014u undergoues $\beta$ - decay to $^{12}_{6}C,^{12}_{6}C$ has an excited state of the nucleus ($^{12}_{6}C^*$) at 4.041 MeV above its ground state. If $^{12}_{5}B$ decays to $^{12}_{6}C^*$, the maximum kinetic energy of the $\beta$ - particle in units of MeV is
(1u = 931.5 MeV/$c^2$, where c is the speed of light in vacuum).

समस्थानिक (isotope) $^{12}_{5}B$ जिसका द्रव्यमान 12.014 u है, बीटा क्षय ($\beta$-decay) की प्रक्रिया से $^{12}_{6}C$ में परिवर्तित हो जाता है। $^{12}_{6}C$ की एक नाभिकीय उत्तेजित अवस्था $\left(^{12}_{6}C^*\right)$ निम्नतम अवस्था से 4.041 MeV ऊपर होती है। अगर $^{12}_{6}B$ क्षय होकर $^{12}_{6}C^*$ में परिवर्तित होता है तो बीटा कण की अधिकतम गतिक ऊर्जा (MeV की मात्रा में) क्या होगी ?
(1 u = 931.5 MeV/$c^2$)ए यहाँ c निर्वात में प्रकाश की गति है।

**Sol.** **9**

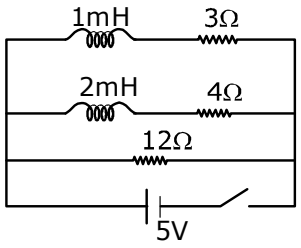
$^{12}_{5}B \longrightarrow {}^{12}_{6}C^* + {}^{0}_{-1}\beta$
$\uparrow$
4.041MeV

Suppose $\beta^-$ has $(KE)_{max.}$ = k
Total energy released, $\Delta E = 931\ (\Delta m)$ MeV
Mass defect, $\Delta m$ = (12.014 – 12) 931.5
= 13.04 MeV
Now, $\Delta E$ = 4.041 + K
K = $\Delta E$ – 4.041 = 9 MeV

**15.** Two inductors $L_1$ (inductance 1 mH, internal resistance 3 $\Omega$) and $L_2$ (inductance 2 ml internal resistance 4$\Omega$), and a resistor R (resistance 12$\Omega$) are all connected in parallel across a 5V battery. The circuit is switched on at time t = 0. The ratio of the maximum the minimum current ($I_{mass}$/$I_{min}$) drawn from the battery is

दो प्रेरकों (Inductors) $L_1$ तथा $L_2$ का प्रेरकत्व क्रमशः 1 mH एवं 2 mH हैं, एवं आंतरिक प्रतिरोध क्रमशः 3$\Omega$ 4$\Omega$ हैं। इन दोनो प्रेंरकों तथा एक प्रतिरोधक R, जिसका प्रतिरोध 12 $\Omega$ है, सभी को एक 5 V की बैट्री से समानान्तर में जोड़ दिया गया है परिपथ को समय t = 0 पर चालू किया जाता है। बैट्री से निकली अधिकतम एवं न्यूनतम धाराओं का अनुपात ($I_{max}/I_{min}$) क्या होगी ?

**Sol.** **8**

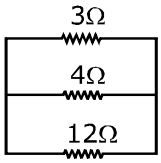


Min. current is at t = 0

$i_{min} = \frac{5}{12}$ A

Max. current is at $t \to \infty$

$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$




$r_{eq} = \frac{3}{2}\ \Omega$

$i_{max} = \frac{10}{3}$ A

$\frac{i_{max}}{i_{min}} = \frac{10}{3} \times \frac{12}{5} = 8$

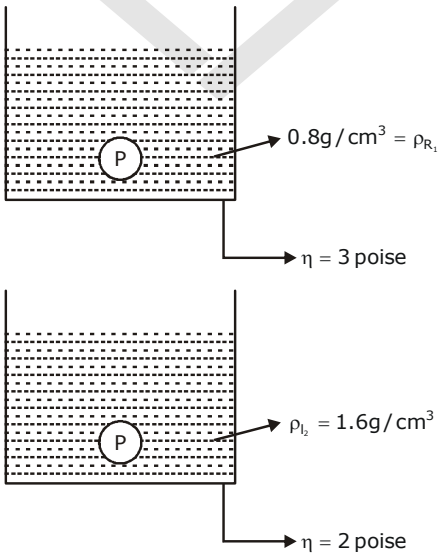
**16.** Consider two solid sphere P and Q each of density 8 gm $cm^{-3}$ and diameters 1 cm and 0.5 cm, respectively. Sphere P is dropped into a liquid of density 0.8 gm $cm^{-3}$ and viscosity $\eta$ = 3 poiseulles. Sphere Q is dropped into a liquid of density 1.6 gm $cm^{-3}$ and viscosity $\eta$ = 2 poiseulles. The ratio of the terminal velocities of P and Q is

8 gm $cm^{-3}$ धनत्व वाले दो ठोस गोले P तथा Q का व्यास क्रमशः 1 cm एवं 0.5 cm हैं। गोले P को 0.8 gm $cm^{-3}$ धनत्व एवं n = 3 poiseulles श्यानत्व (viscosity) वाले एक तरल में गिराया जाता है और गोले Q को 1.6 gm $cm^{-3}$ धनत्व एवं n = 2 poiseulles श्यानत्व (viscosity) वाले दूसरे तरल में गिराया जाता है। गोले P एवं Q के अंतिम वेगों का अनुपात क्या होगा ?

**Sol.** **3**

$\rho_P = 8\ g/cm^3 = \rho_Q$

$R_P = 1$ cm ; $R_Q = 0.5$ cm




Applying :

$V_T = \frac{2}{9}\frac{r^2}{\eta}(\rho_0 - \rho)g$

$$V_{T_1} = \frac{2}{9} \times \frac{10^{-3} \times 10^{-3}}{3} (8 - 0.8) \times 10^{-3} \times 10$$

$$V_{T_2} = \frac{2}{9} \times \frac{10^{-3} \times 10^{-3} \times 0.25}{2} (8 - 1.6) \times 10^{-3} \times 10$$

$$\frac{V_{T_1}}{V_{T_2}} = \frac{\frac{7.2}{3}}{\frac{6.4}{8}} = 3$$

**17.** A metal is heated in a furnace where a sensor is kept above the metal surface to read the power radiated (P) by the metal. The sensor has a scale that displays $\log_2(P/P_0)$ where $P_0$ is a constant. When the metal surface is at a temperature of 487 ºC, the sensor shows a value 1. Assume that the emissivity of the metallic surface ramins constant. What is the value displayed by the sensor when the temperature of the metal surface is raised to 2767ºC?

एक धातु को भट्टी में गरम करते हुए उसकी विकिरण शक्ति (P) को धातु के ऊपर रखे हुए एक संवेदक (sensor) से पढ़ते हैं। संवेदक का पैमाना $\log_2 (P/P_0)$ को पढ़ता है, यहाँ $P_0$ एक स्थिरांक है। जब धातु का तापमान 487 °C है तो संवेदक का पठन 1 है। मान लीजिये कि धातु की सतह की उत्सर्जकता स्थिर है। धातु की सतह का तापमान 2767 °C तक बढ़ाने पर संवेदक का पठन क्या होगा ?

**Sol.** **9**

$$\log_2 \left(\frac{P_1}{P_0}\right) = 1$$

$$\Rightarrow P_1 = 2P_0$$

$$P \propto T^4$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{3040}{760}\right)^4 = (4)^4$$

$$\Rightarrow P_2 = P_1 (4)^4 = (4)^4 \, 2P_0$$

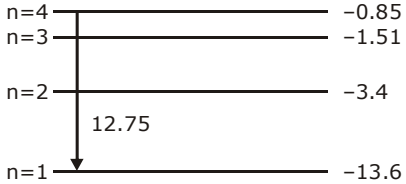
$$\therefore \log_2 \left(\frac{P_2}{P_0}\right) = \log_2 \left(\frac{2^9 P_0}{P_0}\right) = 9$$

**18.** A hydrogen atom in its ground state is irradiated by light of wavelength 970Å. Taking hc/e = $1.237 \times 10^{-6}$ eV m and the ground state energy of hydrogen atom as – 13.6 eV, the number number of lines present in the emission spectrum is.

एक हाइड्रोजन परमाणु को उसकी निम्नतम अवस्था में 970 Å तरंगदैर्ध्य वाले प्रकाश से प्रदीप्त किया जाता है। यहाँ पर hc/e = $1.237 \times 10^{-6}$ eV m तथा हाइड्रोजन परमाणु की न्यूनतम अवस्था की ऊर्जा –13.6 eV है। उत्सर्जित मानावली (emission spectrum) में रेखाओं की संख्या क्या होगी ?

**Sol.** **6**

Wavelength = 970 Å




$$= \frac{12375}{970} = 12.75 \text{ eV}$$

Now we known that :

The energy gap corresponding to the given wavelenght is same as for n = 4 to n = 1.

$\therefore$ Now for spectral lines = $\frac{n(n-1)}{2}$

$$= \frac{4(4-1)}{2} = 6 \text{ Lines}$$

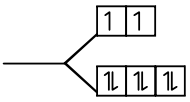
# [CHEMISTRY]

**19.** The increasing order of atomic radii of the following group 13 elements is
(A) Al < Ga < In < Tl (B) Ga < Al < In < Tl
(C) Al > In < Ga < Tl (D) Al < Ga < Tl < In
निम्नलिखित समूह (group) 13 के तत्वों की बढ़ती हुई परमाणु त्रिज्याओं का क्रम है
(A) Al < Ga < In < Tl (B) Ga < Al < In < Tl
(C) Al > In < Ga < Tl (D) Al < Ga < Tl < In

**Sol.** **B**
Al = 143 pm
Ga = 135 pm
In = 167 pm
Tl = 170 pm

**20.** Among $[Ni(Co)_4]$, $[NiCl_4]^{2-}$, $[Co(NH_3)_4Cl_2]Cl$, $Na_2[CoF_6]^{3+}$, $Na_2O_2$ and $CsO_2$, the total number of paramagnetic compounds is
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
$[Ni(Co)_4]$, $[NiCl_4]^{2-}$, $[Co(NH_3)_4Cl_2]Cl$, $Na_2[CoF_6]^{3+}$, $Na_2O_2$ तथा $CsO_2$ में अनुचुम्बकीय (paramagnetic) यौगिकों की कुल संख्या है
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

**Sol.** **B**
$[NiCl_4]^{2-} = Ni^{2+} = 3d^8 4s^0$

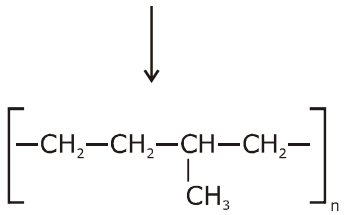


$Na_3[CoF_6] = 3d^6\ 4s^0$

$CsO_2 = sp^3d^2$
$Cs^+.O_2^-$ = superoxised as per M.I.

**21.** On complete hydrogenation, natural rubber produces
(A) ethylene-propylene copolymer (B) vulcanised rubber
(C) polypropylene (D) polybutylene
पूर्ण हाइड्रोजनीकरण पर प्राकतिक रबर क्या उत्पादित करती है ?
(A) एथिलीन-प्रोपिलीन सहबहुलक (B) वल्कनीकत (vulcanised) रबर
(C) पॉलीप्रोपिलीन (D) पॉलीब्यूटिलीन

**Sol.** **A**
$n(CH_2=CH_2) + n(CH_3-CH=CH_2)$
Ethylene Propylene



Polyethylene–Polypropylene

**22.** One mole of an ideal gas at 300 K in thermal contact with surroundings expands isothermally from 1.0 L to 2.0 L against a constant pressure of 3.0 atm. In this process, the change in entropy of surroundings ($\Delta s_{max}$) in J $K^{-1}$ is
(A) 5.763 (B) 1.013 (C) –1.013 (D) –5.763

एक आदर्श गैस का एक मोल 300 K पर परिवेश (surroundings) के साथ ऊष्मीय सम्पर्क (thermal contact) में समतापीय अवस्था में 3.0 atm के स्थिर दाब पर 1.0 L से 2.0 L तक प्रसारित होता है। इस प्रक्रिया में परिवेश की एन्ट्रॉपी में परिवर्तन ($\Delta s_{max}$) J $K^{-1}$ मात्रक में, क्या होगा ?

(A) 5.763 (B) 1.013 (C) –1.013 (D) –5.763

**Sol.** **C**

$\Delta E = q = w$

$o = q - |P\Delta V|$

$o = q - (3 \times 1)$ atm

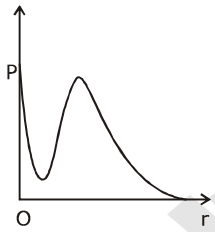
$q = 3$ atm L

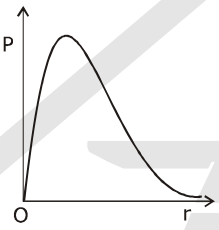
$$\Delta s_{surr} = -\frac{Q_{sys.}}{T_{surr.}} = \frac{+\left[-3atm\,(l)\right]}{300} = \frac{-3}{300}\ \frac{\text{lit atm}}{\text{kel}}.$$

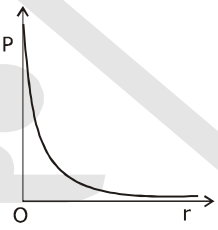
$$= \frac{-3}{300} \times 101.3 \text{ J/kel}$$

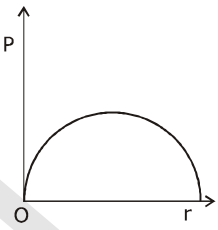
$= -1.013$ J/kel

**23.** P is the probability of finding the 1s electron of hydrogen atom in a spherical shell of infinitesimal thickness, dr, at a distance r from the nucleus. The volume of this shell is $4\pi r^2 dr$. The qualitative sketch of the dependence of P or r is:

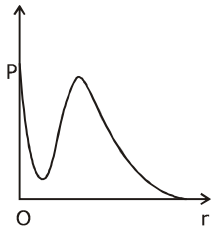
(A) 

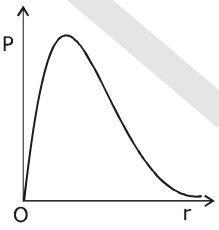

(B) 

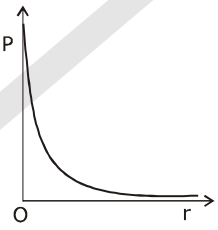

(C) 

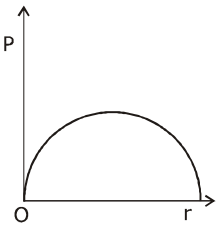

(D) 


हाइड्रोजन परमाणु के 1s इलेक्ट्रॉन के नाभिक से r दूरी पर एक अनन्त सूक्ष्म मोटाई, dr, के गोलीय कोश में पाये जाने की प्रायिकता (probability) *P* है। इस कोश का आयतन $4\pi r^2 dr$ है। P या r पर निर्भरता का गुणात्मक रेखाचित्र है

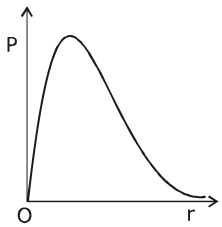
(A) 


(B) 


(C) 


(D) 


**Sol.** **B**




$r = 0$, $4\pi r^2 dr = 0$

No. of radial modes = $n-\ell-1$

$= 1 - 0 - 1 = 0$

**24.** The reagent(s) that can selectively precipitate $S^{2-}$ from a mixture of $S^{2-}$ and $SO_4^{2-}$ in aqueous solution is(are)

(A) $CuCl_2$ (B) $BaCl_2$ (C) $Pb(OOCCH_3)_2$ (D) $Na_2[Fe(CN)_5NO]$

अभिकारक (reagent) जो $S^{2-}$ तथा $SO_4^{2-}$ के मिश्रण से $S^{2-}$ को वरणात्मक (selectively) अवक्षेप द्वारा जलीय विलयन से पथक कर सकता (सकते) है/हैं

(A) $CuCl_2$ (B) $BaCl_2$ (C) $Pb(OOCCH_3)_2$ (D) $Na_2[Fe(CN)_5NO]$

**Sol.** **A**

$CuCl_2 \xrightarrow{S^{--}} CuS$ (black ppt.)

$CuSO_4$ is not a ppt.

**25.** A plot of the number of neutrons (N) against the number of protons(P) of stable nucleus exhibits upward deviation from linearity for atomic number, Z > 20. For an unstable nucleus having N/P ratio less than 1, the possible mode(s) of decay is(are)

(A) $\beta^-$decay ($\beta$ emission) (B) orbital or K-electron capture

(C) neutron emission (D) $\beta^+$ -decay(positron emission)

स्थायी नाभिकों के न्यूट्रॉनों की संख्या (N) विरूद्ध प्रोटॉनों की संख्या (P) का आलेख परमाणु क्रमांक, Z > 20 के लिये रैखिकता से ऊर्ध्वमुखी विचलन प्रदर्शित करता है। एक अस्थायी नाभिक के लिये जिसका N/P अनुपात 1 से कम है, क्षय की संभव विधा(यें) है/हैं

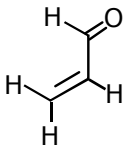
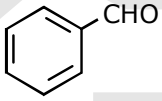
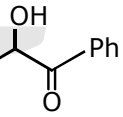
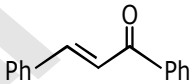
(A) $\beta^-$क्षय ($\beta$ उत्सर्जन) (B) कक्षीय अथवा K-इलेक्ट्रॉन प्रग्रहण (capture)

(C) न्यूट्रॉन उत्सर्जन (D) $\beta^+$ -क्षय(पॉजिट्रॉन उत्सर्जन)

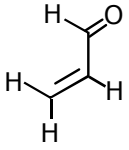
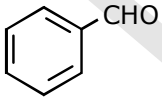
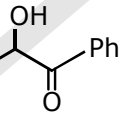
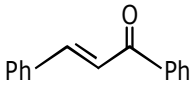
**Sol.** **B, D**

According to theory

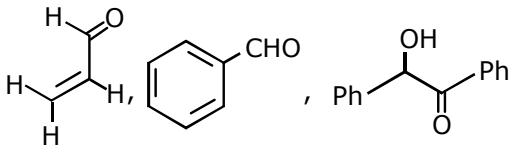
**26.** Positive Tollen's test is observed for

(A)  (B)  (C)  (D) 

निम्नलिखित में से कौनसा (कौनसे) विकल्प सकारात्मक (Positive) टॉलेन परीक्षण (Tollen's test) दिखाता (दिखाते) है (हैं)?

(A)  (B)  (C)  (D) 

**Sol.** **A, B, C**



**27.** The correct statement(s) about the following reaction sequence is(are):

Cumene ($C_9H_{12}$) $\xrightarrow[(ii)\ H_3O^+]{(i)\ O_2}$ P $\xrightarrow{CHCl_3/NaOH}$ Q (major) + R(minor)

$Q \xrightarrow[PhCH_2Br]{NaOH} S$

(A) R is steam volatile

(B) Q gives dark violet coloration with 1 % aqueous $FeCl_3$ solution

(C) S gives yellow precipitate with 2,4-dinitrophenylhydrazine

(D) S gives dark violet coloration with 1 % aqueous $FeCl_3$ solution

निम्नलिखित अभिक्रिया अभिक्रम से संबंधित सही कथन है/हैं

क्युमीन (Cumene) $(C_9H_{12}) \xrightarrow[(ii)\ H_3O^+]{(i)\ O_2} P \xrightarrow{CHCl_3/NaOH} Q$ (मुख्य) + R(गौण)

$$Q \xrightarrow[PhCH_2Br]{NaOH} S$$

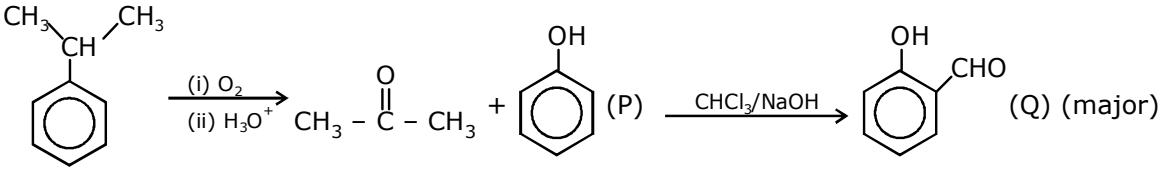
(A) R भाप वाष्पशील (steam volatile) है।

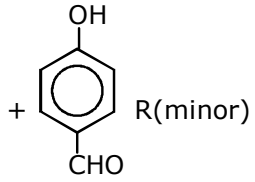
(B) 1 % जलीय $FeCl_3$ विलयन के साथ Q गहन बैंगनी रंग देता है।

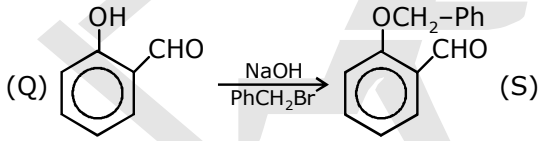
(C) 2,4-डाइनाइट्रोफेनिलहाइड्रेजीन (dinitrophenylhydrazine) के साथ S पीला अवक्षेपत देता है

(D) 1 % जलीय $FeCl_3$ विलयन के साथ S गहन बैंगनी रंग देता है

**Sol. B, C**




**28.** The crystalline form of borax has

(A) Tetranuclear $[B_4O_5(OH)_4]^{2-}$ unit

(B) All boron atoms in the same plane

(C) Equal number of $sp^2$ and $sp^3$ hybridized boron atoms

(D) One terminal hydroxide per boron atom

7

बौरेक्स (borax) के क्रिस्टलीय रूप में

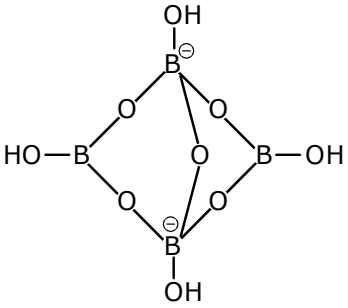
(A) चतुर्नाभिकीय $[B_4O_5(OH)_4]^{2-}$ एकक (unit) है।

(B) सभी बोरॉन परमाणु एक ही तल में हैं

(C) $sp^2$ तथा $sp^3$ संकरित (hybridized) बोरॉन परमाणुओं की संख्या समान है।

(D) प्रति बोरॉन परमाणु पर एक अन्तस्थ (terminal) हाइड्रोक्सॉइड है।

**Sol. A, C, D**



**29.** The compound(s) with TWO lone pairs of electrons on the central atom is(are):
(A) $BrF_5$ (B) $ClF_3$ (C) $XeF_4$ (D) $SF_4$
यौगिक/यौगिकों, जिसके/जिनके केन्द्रीय परमाणु के पास दो एकॉकी इलेक्ट्रॉन युग्म है/हैं
(A) $BrF_5$ (B) $ClF_3$ (C) $XeF_4$ (D) $SF_4$

**Sol.** **B, C**
$ClF_3 \rightarrow$ 3B.P. + 2L.P.
$XeF_4 \rightarrow$ 4B.P. + 2L.P.

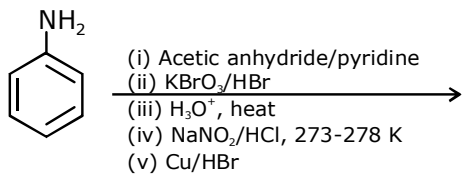
**30.** According to the Arrhenius equation,
(A) A high activation energy usually implies a fast reaction.
(B) Rate constant increases with increase in temperature. This is due to a greater number of collisions whose energy exceeds the activation energy.
(C) Higher the magnitude of activation energy, stronger is the temperature dependence of the rate constant.
(D) The pre-exponential factor is a measure of the rate at which collisions occur, irrespective of their energy.
आर्रेनिअस (Arrhenius) समीकरण के अनुसार
(A) उच्च सक्रियण ऊर्जा (activation energy) सामान्यतः तीव्र अभिक्रिया दर्शाती है।
(B) तापमान के बढ़ने से वेग–स्थिरांक (Rate constant) बढ़ता है। यह उन टक्करों की संख्या बढ़ने के कारण है जिनकी ऊर्जा सक्रियण ऊर्जा से ज्यादा हो जाती है।
(C) सक्रियण ऊर्जा की मात्रा जितनी उच्च होगी, वेग–स्थिरांक की तापमान पर निर्भरता उतनी ही प्रबल होगी।
(D) उनकी ऊर्जा पर विचार किये बिना, पूर्व चरघांतांकी गुणक (pre-exponential factor) टक्करों की दर (Rate of collisions) का मापक है।

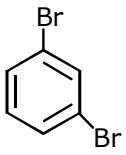
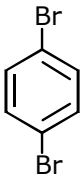
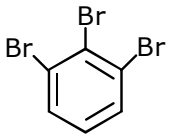
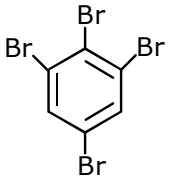
**Sol.** **B, C, D**
$K = Ae^{-Ea/RT}$
(B) $K \propto T$
by Increacing temperature rate constant also increases

(C) $\log \frac{K_2}{K_1} = \frac{Ea(T_2 - T_1)}{2.3RT_1T_2} = \frac{K_2}{K_1} \propto Ea$

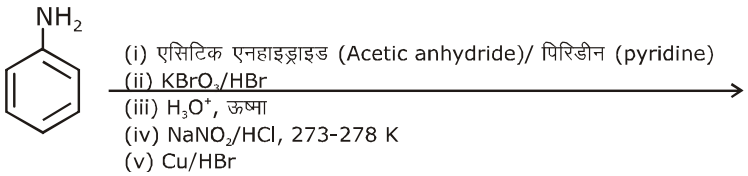
(D) $Ea \rightarrow o$
$K = A$
$r = K.$

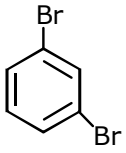
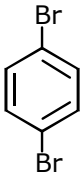
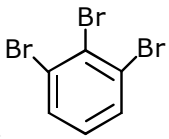
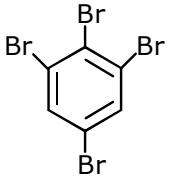
**31.** The product(s) of the following reaction sequence is(are):



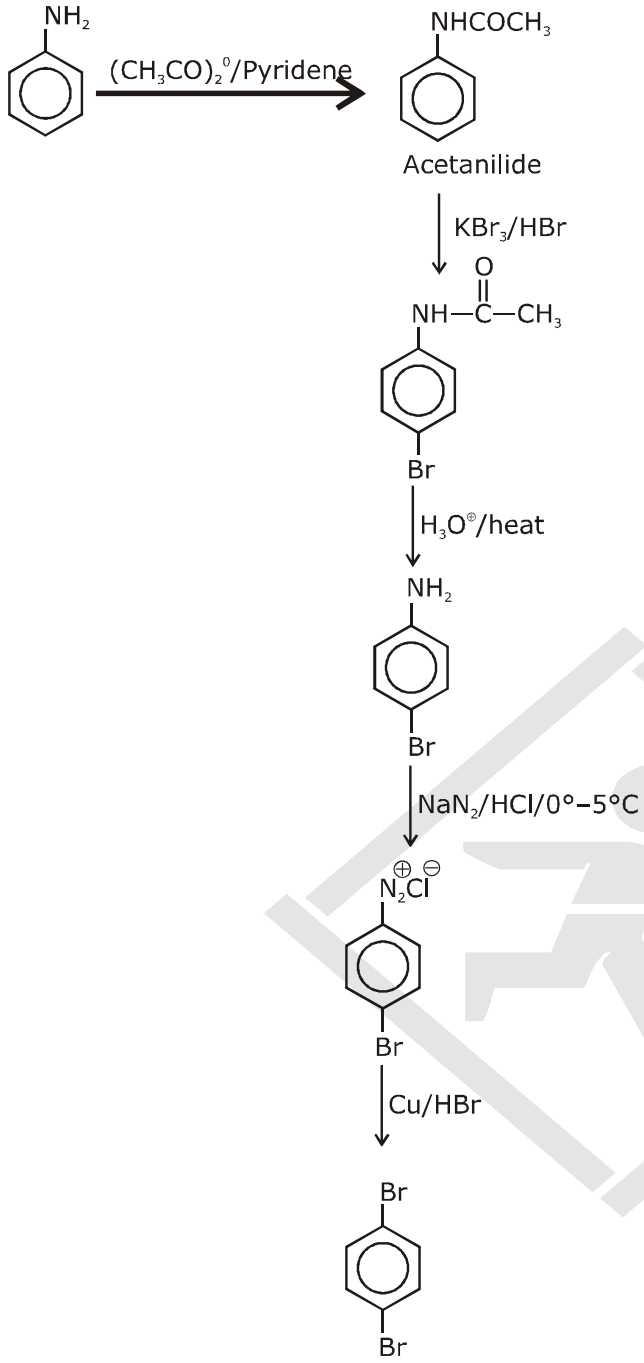
(A)  (B)  (C)  (D) 

निम्नलिखित अभिक्रिया अभिक्रम का (के) उत्पाद है/है




(A)  (B)  (C)  (D) 

**Sol. B**




**32.** The diffusion coefficient of an ideal gas is proportional to its mean free path and mean speed. The absolute temperature of an ideal gas is increased 4 times and its pressure is increased 2 times. As a result, the diffusion coefficient of this gas increases x times. The value of x is.

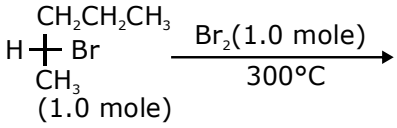
एक आदर्श गैस का विसरण गुणांक (diffusion coefficient) इसके माध्य मुक्त पथ (mean free path) तथा माध्य चाल (mean speed) के समानुपातिक है। एक आदर्श गैस का परम तापमान 4 गुना बढ़ाया जाता है औ इसका दाब 2 गुना बढ़ाया जाता हैं। परिणामस्वरूप, इस गैस का विसरण गुणांक x गुना बढ़ जाता हैं। x का मान हैं।

**Sol.** **4**

Diffusion constant $\propto \frac{T^{3/2}}{P}$

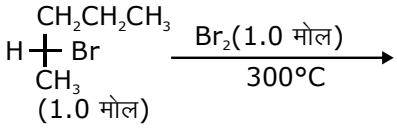
$\frac{(4T)^{3/2}}{2P} = 4\frac{(T)^{3/2}}{P}$

**33.** In the following monobromination reaction, the number of possible chiral products is:



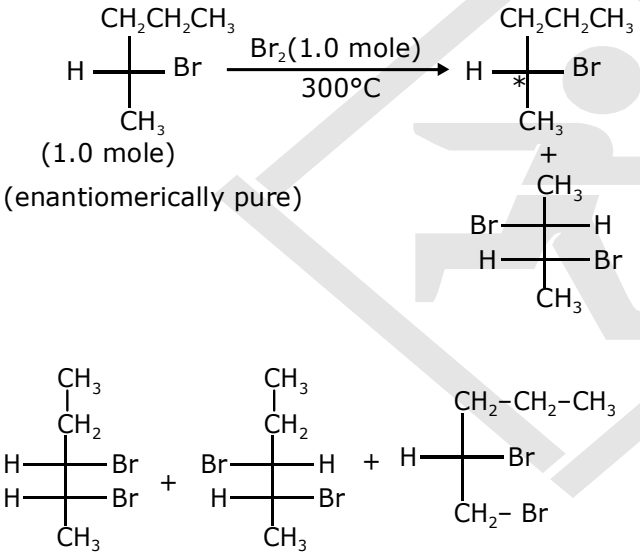

(enantiomerically pure)

निम्नलिखित एकब्रोमिनेशन (monobromination) अभिक्रिया में सम्भावित किरल (chiral) उत्पादों की संख्या हैः




(enantiomerically pure)
(ऐनैन्टियोमरीय शुद्ध)

**Sol.** **5**



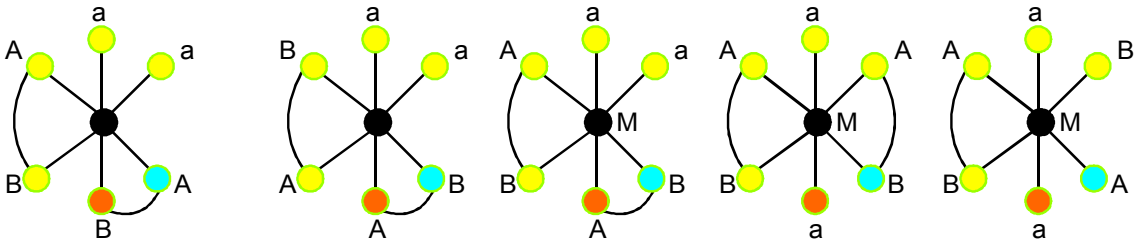




**34.** The number of geometric isomers possible for the complex $[CoL_2Cl_2]^-$ (L = $H_2NCH_2CH_2O^-$) is.
संकुल $[CoL_2Cl_2]^-$ (L = $H_2NCH_2CH_2O^-$) के संभावित ज्यामितीय समावयवियों (geometric isomers) की संख्या हैं।

**Sol.** **5**

**$[M(AB)_2a_2]$**



**35.** The mole fraction of a solute in a solution is 0.1. At 298 K, molarity of this solution is the same as its molality. Density of this solution at 298 K is 2.0 g $cm^{-3}$. The ratio of the molecular weights of the solute and solvent, $\left(\frac{MW_{solute}}{MW_{solvent}}\right)$, is.

एक विलेय का एक विलयन में मोल भिन्न (mole fraction) 0.1 हैं। 298 K पर इस विलयन की मोलरता (molarity) इसकी मोललता (molality) के समान हैं। इस विलयन का घनत्व 298 K पर 2.0 g $cm^{-3}$ हैं। विलेय तथा विलायक के अणुभारों का अनुपात, $\left(\frac{\text{अणुभार}_{\text{विलेय}}}{\text{अणुभार}_{\text{विलायक}}}\right)$, है।

**Sol.** **9**

$X_A = 0.1$, M = m , D = 2gm/ml

0.1 mole 0.9 mole

m = M

$$= \frac{0.1 \times 1000}{0.9 \times Mw_{solvent}} = \frac{0.1 \times d \times 1000}{(0.1M_1 + 0.9M_2)}$$

$$= \frac{0.1 \times 1000}{0.9 \times M_2} = \frac{2}{(0.1M_1 + 0.9M_2)}$$

$$= \frac{0.1M_2 + 0.1M_1}{0.9M_2} = 2$$

$$1 + \frac{M_1}{9M_2} = 2 , \quad \frac{M_1}{M_2} = 9$$

$$\frac{M_1}{9M_2} = 1$$

**36.** In neutral or faintly alkaline solution, 8 moles of permanganate anion quantitatively oxidize thiosulphate anions to produce X moles of a sulphur containing product. The magnitude of X is.
उदासीन अथवा धूमिल क्षारीय विलयन (alkaline solution) में 8 मोल परमैगनेट ऋणायन (permanganate anion) थायोसल्फेट ऋणायनों (thiosulphate anions) का मात्रात्मक आक्सीकरण कर X मोल सल्फर (sulphur) अन्तर्विष्ट उत्पाद उत्पादित करते हैं। X की मात्रा हैं।

**Sol.** **6**

# PART - III : MATHEMATICS
# SECTION – I

**37.** A computer producing factory has only two plants $T_1$ and $T_2$ produces 20% and plant $T_2$ produces 80% of the total computers produced. 7% of computers produced in the factory turn out to be defective. It is known that
P (computer turns out to be defective given that it is produced in plant $T_1$)
= 10 P (computer turns out to be defective given that it is produced in plant $T_2$),
where P(E) denotes the probability of an event E. A computer produced in the factory is randomly selected and it does not turn out to be defective. Then the probability that it is produced in plant $T_2$ is

(A) $\frac{36}{73}$ (B) $\frac{47}{79}$ (C) $\frac{78}{93}$ (D) $\frac{75}{83}$

एक संगणक (computer) निर्माण करने वाले कारखाने में केवल दो संयंत्र (plant) $T_1$ और $T_2$ है। कुल निर्मित संगणकों का 20% संयंत्र $T_1$ और 80% संयंत्र $T_2$ निर्माण करते हैं। कारखाने में निर्मित 7% संगणक खराब (defective) निकलते हैं। यह ज्ञात हैं कि
P (संगणक खराब निकलता है यदि यह दिया गया है कि संगणक संयंत्र $T_1$ में निर्मित है)
= 10 P (संगणक खराब निकलता है यदि यह दिया गया है कि संगणक संयंत्र $T_2$ में निर्मित है),
जहाँ P(E) एक घटना E की प्रायिकता दर्शाता है। कारखाने में निर्मित एक संगणक यादच्छया चुना जाता है और वह खराब नहीं निकलता है। तब उसके संयंत्र $T_2$ में निर्मित होने की प्रायिकता है।

(A) $\frac{36}{73}$ (B) $\frac{47}{79}$ (C) $\frac{78}{93}$ (D) $\frac{75}{83}$

**Sol.** **C**

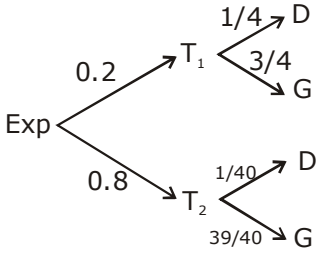
$T_1$ & $T_2$ $\quad P(D) = \frac{7}{100}$

20% 80% $\quad P(T_1) = \frac{20}{100}$

$P(T_2) = \frac{80}{100}$

$P(D/T_1) = 10P(D/T_2)$
$P(D) = P(T_1)\,P(D/T_1) + P(T_1) + P(T_2)\,P(D/T_2)$
$0.07 = 0.2\,(10\alpha) + 0.8(\alpha)$
$0.07 = 2\alpha + 0.8\alpha$

$P(D/T_2) = \alpha = \frac{0.07}{2.8} = \frac{7}{280} = \frac{1}{40}$




$P(T_2/\bar{D}) = \frac{0.8 \times \frac{39}{40}}{0.2 \times \frac{30}{40} + 0.8 \times \frac{39}{40}} = \frac{31.2}{6 + 31.2}$

$= \frac{31.2}{37.2} = \frac{312}{372}$ $\quad = \frac{104}{124} = \frac{52}{62} = \frac{26}{31} = \frac{78}{93}$

**38.** The least value of $\alpha \in R$ for which $4\alpha x^2 + \frac{1}{x} \geq 1$ for all x > 0, is

(A) $\frac{1}{64}$ (B) $\frac{1}{32}$ (C) $\frac{1}{27}$ (D) $\frac{1}{25}$

यदि $\alpha \in R$ और सभी $x > 0$ है, तब $4\alpha x^2 + \frac{1}{x} \geq 1$ के लिए $\alpha$ का न्यूनतम मान क्या होगा?

(A) $\frac{1}{64}$ (B) $\frac{1}{32}$ (C) $\frac{1}{27}$ (D) $\frac{1}{25}$

**Sol. C**

$\alpha \in R$

$4\alpha x^2 + \frac{1}{x} \geq 1 \qquad x > 0$

$4\alpha x^3 + 1 \geq x$

$4\alpha x^3 \geq x - 1$

$\alpha \geq \frac{x-1}{4x^3}$

$y = \frac{x-1}{4x^3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - (x-1)(3x^2)}{x^6} = \frac{x^3 - (3x^3 - 3x^2)}{x^6} = 0$

$\Rightarrow \frac{-2x^3 + 3x^2}{x^6} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2(2x-3)}{x^6} = 0$

$\therefore x = \frac{3}{2}$

$\therefore \alpha \geq \frac{2}{4 \times 27}$

$\alpha \geq \frac{1}{27}$

$\alpha_{min} = \frac{1}{27}$

**39.** Let S = $\left\{x \in (-\pi, \pi) : x \neq 0, \pm\frac{\pi}{2}\right\}$, The sum of all distinct solutions of the equation $\sqrt{3}$ sec x + cosec x + 2 (tan x – cot x) = 0 in the set S is equaL to

(A) $-\frac{7\pi}{9}$ (B) $-\frac{2\pi}{9}$ (C) 0 (D) $\frac{5\pi}{9}$

माना कि S = $\left\{x \in (-\pi, \pi) : x \neq 0, \pm\frac{\pi}{2}\right\}$ है। समुच्चय S में समीकरण $\sqrt{3}$ sec x + cosec x + 2 (tan x – cot x) = 0 के सभी भिन्न हलों (all distinct solutions) का योग (sum) है।

(A) $-\frac{7\pi}{9}$ (B) $-\frac{2\pi}{9}$ (C) 0 (D) $\frac{5\pi}{9}$

**Sol.** **C**

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \cos 2x$

$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$

$x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm 2x$

+ve −ve

$x - \frac{\pi}{3} = 2x\pi + 2x$ $\quad 3x = 2x\pi + \frac{\pi}{3}$

$x = -2x\pi - \frac{\pi}{3}$ $\quad 3x = \frac{\pi}{3}(6n + 1)$

$x = -\frac{\pi}{3}(6n + 1)$ $\quad x = \frac{\pi}{9}(6n + 1)$

$x = -\frac{\pi}{3},$ $\quad x = \frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{-5\pi}{9}$

Sum $= -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{9} - \frac{5\pi}{9}$

$= \frac{-3\pi + \pi + 7\pi - 5\pi}{5} = 0$

**40.** Let $-\frac{\pi}{6} < \theta < -\frac{\pi}{12}$. Suppose $\alpha_1$ and $\beta_1$ are the roots of the equation $x^2 - 2x\sec\theta + 1 = 0$ and $\alpha_2$ and $\beta_2$ are the roots of the equation $x^2 + 2x\tan\theta + 1 = 0$. If $\alpha_1 > \beta_1$ and $\alpha_2 > \beta_2$, then $\alpha_1 + \beta_2$ equals

(A) $2(\sec\theta - \tan\theta)$ (B) $2\sec\theta$ (C) $-2\tan\theta$ (D) 0

माना कि $-\frac{\pi}{6} < \theta < -\frac{\pi}{12}$ है। मान लीजिये कि $\alpha_1$ और $\beta_1$ समीकरण $x^2 - 2x\sec\theta + 1 = 0$ के मूल (roots) हैं और $\alpha_2$ और $\beta_2$ समीकरण $x^2 + 2x\tan\theta + 1 = 0$ के मूल हैं। यदि $\alpha_1 > \beta_1$ और $\alpha_2 > \beta_2$ हैं, तब $\alpha_1 + \beta_2$ का मान है।

(A) $2(\sec\theta - \tan\theta)$ (B) $2\sec\theta$ (C) $-2\tan\theta$ (D) 0

**Sol.** **C**

$x = \frac{2\sec\theta \pm \sqrt{4\sec^2\theta - 4}}{2}$

$x = \sec\theta \pm \tan\theta$

$x = \sec\theta + \tan\theta$

$x = \sec\theta - \tan\theta$

$\alpha_1 = \sec\theta - \tan\theta$

$\beta_1 = \sec\theta + \tan\theta$

$x^2 + 2x\tan\theta - 1 = 0$

$x = \frac{-2\tan\theta \pm \sqrt{4\tan^2\theta + 4}}{2}$

$x = -\tan\theta \pm \sec\theta$

$\alpha_2 = \sec\theta - \tan\theta$

$\beta_2 = -\sec\theta - \tan\theta$

$\sec\theta - \tan\theta - \sec\theta - \tan\theta$

$= -2\tan\theta$

**41.** A debate club consists of 6 girls and 4 boys. A team of 4 members is to be selected from this club including the selection of a captain ( from among these 4 members ) for the team. If the team has to include at most one boy, then the number of ways of selecting the team is
(A) 380 (B) 320 (C) 260 (D) 95
एक वाद–विवाद समूह (club) में 6 लड़कियाँ और 4 लड़के हैं। इस समूह में से एक चार सदस्यीय दल चुनना है जिसमें दल के एक कप्तान (उन्हीं चार सदस्यों से) का चुनाव भी सम्मिलित है। यदि दल में अधिकतम एक लड़का सम्मिलित हो तब दल को चुनें जाने के तरीकों की संख्या है।
(A) 380 (B) 320 (C) 260 (D) 95

**Sol.** **A**

$({}^6C_4 + {}^4C_1\ {}^6C_3)\ {}^4C_1$

$\left(\frac{6\times5}{2}+\frac{4\times6\times5\times4}{3\times2}\right)4$

(15 + 80)4
95 × 4 = 380

# SECTION – II

**42.** In a triangle XYZ, let x, y, z be the lengths of sides opposite to the angle X, Y, Z respectively , and 2s = x + y + z, If $\frac{s-x}{4}=\frac{s-y}{3}=\frac{s-z}{2}$ and area of incircle of the triangle XYZ is $\frac{8\pi}{3}$, then

(A) area of the triangle XYZ in $6\sqrt{6}$

(B) the radius of circumcircle of the triangle XYZ is $\frac{35}{6}\sqrt{6}$

(C) $\sin\frac{X}{2}\sin\frac{Y}{2}\sin\frac{Z}{2}=\frac{4}{35}$ (D) $\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{3}{5}$

माना कि त्रिभुज XYZ में कोणों X, Y, Z के सामने की भुजाओं की लम्बाइयाँ क्रमशः x, y, z हैं और 2s = x + y + z है। यदि $\frac{s-x}{4}=\frac{s-y}{3}=\frac{s-z}{2}$, और त्रिभुज XYZ के अंतर्वत्त का क्षेत्रफल $\frac{8\pi}{3}$ है, तब

(A) त्रिभुज XYZ का क्षेत्रफल $6\sqrt{6}$ है

(B) त्रिभुज XYZ के परिवत्त की त्रिज्या $\frac{35}{6}\sqrt{6}$ है

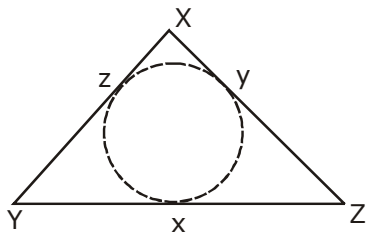
(C) $\sin\frac{X}{2}\sin\frac{Y}{2}\sin\frac{Z}{2}=\frac{4}{35}$ (D) $\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{3}{5}$

**Sol.** **A,C,D**

$\frac{s-x}{4}=\frac{s-y}{3}=\frac{s-z}{2}=\lambda$

3s – ( x + y + z) = 9λ
s = 9λ

$\begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 6\lambda \\ z = 7\lambda \end{cases}$




$r=\frac{\Delta}{s}$

$\pi\left\{\frac{\Delta^2}{s^2}\right\}=\frac{8\pi}{3}$

$3\Delta^2 = 8s^2$

$3\{s(s-x)(s-y)(s-z)\} = 8s^2$

$3\{4\lambda \times 3\lambda \times 2\lambda\} = 8 \times 9\lambda$

$8\lambda^2 = 8$

$\lambda^2 = 1 \qquad \lambda = 1$

(A) $\Delta = \sqrt{9.4.3.2} = 6\sqrt{6}$

(B) $R = \dfrac{5\times 6\times 7}{4\times 6\sqrt{6}} = \dfrac{35}{4\sqrt{6}}$

(C) $\sin\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{y}{2}+\sin\dfrac{z}{2} = \dfrac{(s-x)(s-y)(s-z)}{xyz} = \dfrac{4}{35}$

(D) $\sin^2\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \cos^2\dfrac{z}{2} = \dfrac{s(s-z)}{xy} = \dfrac{3}{5}$

**43.** A solution curve of the differential equation $\left(x^2+xy+4x+2y+4\right)\dfrac{dy}{dx}-y^2=$, $x > 0$ passes through the point ( 1, 3). Then the solution curve
(A) intersects $y = x + 2$ exactly at one point (B) intersects $y = x + 2$ exactly at two points
(C) intersects $y = (x + 2)^2$ (D) does **NOT** intersects $y = (x + 3)^2$

माना कि अवकल समीकरण $\left(x^2+xy+4x+2y+4\right)\dfrac{dy}{dx}-y^2=0$, $x > 0$, का एक हल वक्र बिंदु (1, 3) से गुजरता है। तब वह हल वक्र
(A) $y = x + 2$ को ठीक एक बिंदु पर प्रतिच्छेदित करता है
(B) $y = x + 2$ को ठीक दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करता है
(C) $y = (x + 2)^2$ को प्रतिच्छेदित करता है
(D) $y = (x + 3)^2$ को प्रतिच्छेदित नहीं करता है

**Sol. A,D**

$\left(x^2+2xy+4x+2y+4-xy\right)\dfrac{dy}{dx}-y^2=0 \qquad x > 0$

$\left((x+2)^2+y(x+2)\right)\dfrac{dy}{dx}=y^2$

$(x+2)(x+2+y).dy = y^2dx$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{(x+2)(x+2+y)}$

$y = v(x + 2)$

$\dfrac{dy}{dx}=v+(x+2)\dfrac{dv}{dx}$

$(x+2)\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v^2}{1+v}-v$

$(x+2)\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v^2-v-v^2}{1+v}$

$\dfrac{1+v}{v}dv=-\dfrac{dx}{x+2}$

$$\left(\frac{1}{v}+1\right)dv = -\frac{dx}{x+2}$$

$$\ln v + v = -\ln(x+2) + c$$

$$\ln\left((x+2).v\right) + v = c$$

$$\ln\{y\} + \frac{y}{x+2} = c \qquad (1, 3)$$

$$\ln 3 + \frac{3}{3} = c$$

$$c = 1 + \ln 3$$

$$\ln y + \frac{y}{x+2} = 1 + \ln 3$$

$$\ln\left(\frac{y}{3}\right) = 1 - \frac{y}{x+2}$$

**(A)** $y = x + 2$

$$\therefore \ln\left(\frac{y}{3}\right) = 0$$

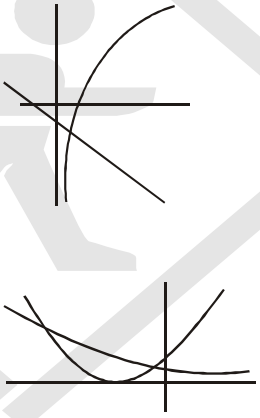
$y = 3, \quad x = 1$

**(C)** $\ln\frac{y}{3} = 1 - (x+2)$

$$\ln\left(\frac{y}{3}\right) = -x - 1$$

**(D)** $\ln\frac{(x+3)^2}{3} = 1 - \frac{(x+3)^2}{x+2}$

$$\frac{(x+3)^2}{2} = e^{1-\frac{(x+3)^2}{x+2}}$$



Both solution are negative though it is given $x > 0$

**44.** Consider a pyramid OPQRS located in the first octant $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ with O as origin, and OP and OR along the x - axis, respectively. The base OPQR of the pyramid is a square with OP = 3. The point S is directly above the mid- point T of diagonal OQ such that TS = 3. Then

(A) the acute angle between OQ and OS is $\frac{\pi}{3}$

(B) the equation of the plane containing the triangle OQS is $x - y = 0$

(C) the length of the perpendicular from P to the plane containing the trianle OQS is $\frac{3}{\sqrt{2}}$

(D) the perpendicular distance from O to the straight line containing RS is $\sqrt{\frac{15}{2}}$

विचार कीजिये, एक सूच्याकार (pyramid) OPQRS जो प्रथम अष्ठांशक (first octant) $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ में स्थित है, जिसमें O मूलबिन्दु तथा OP और OR क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष पर हैं। इस सूच्याकार का आधार OPQR एक वर्ग है जिसमें OP = 3 है। बिन्दु S कर्ण (diagonal)OQ के मध्यबिन्दु T के ठीक ऊपर इस प्रकार है कि TS = 3 है। तब

(A) OQ और OS के बीच का न्यूनकोण $\frac{\pi}{3}$ है

(B) त्रिभुज OQS को अंतर्विष्ट करने वाले समतल की समीकरण x – y = 0 है

(C) P से त्रिभुज OQS को अंतर्विष्ट करने वाले समतल पर लम्ब की लंबाई $\frac{3}{\sqrt{2}}$ है

(D) O से RS को अंतर्विष्ट करती हुई सरल रेखा की लम्बवत् दूरी $\sqrt{\frac{15}{2}}$ है

**Sol. B,C,D**

(A) $\tan\theta = \frac{3}{3/\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}$

(B) $\hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 3/2 & 3/2 & 3 \end{vmatrix}$

$\hat{n} = \hat{i}(9) - \hat{j}(9) + \hat{k}(0)$

$\hat{n} = \hat{i} - \hat{j}$

P : 1(x – 3/2) – 1(y – 3/2)

P : x – y = 0

(C) P : (3, 0, 0)

$d = \left|\frac{3-0}{\sqrt{2}}\right|$

(D) $\overline{OS} = 3/2, 3/2, 3$

$|SM| = \frac{\overline{OS}.\overline{V}}{|\overline{V}|}$

$= \frac{\frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 9}{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 9}} = \frac{2}{3\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

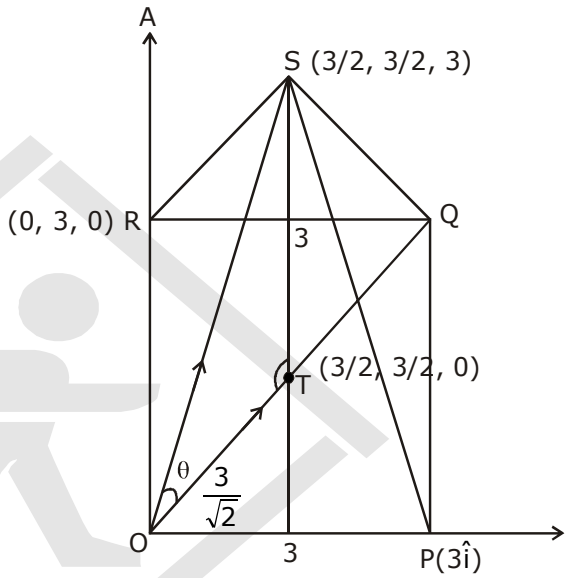
$OM^2 = OS^2 - SM^2$

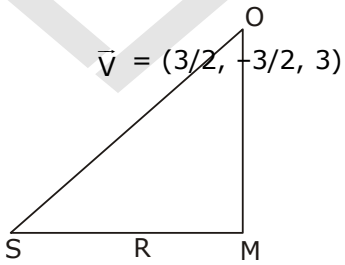
$= \left(\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 9}\right)^2 - (\sqrt{6})^2$

$= \frac{9.6}{4} - 6$

$= 6\left(\frac{5}{4}\right)$

$= \sqrt{\frac{15}{2}}$



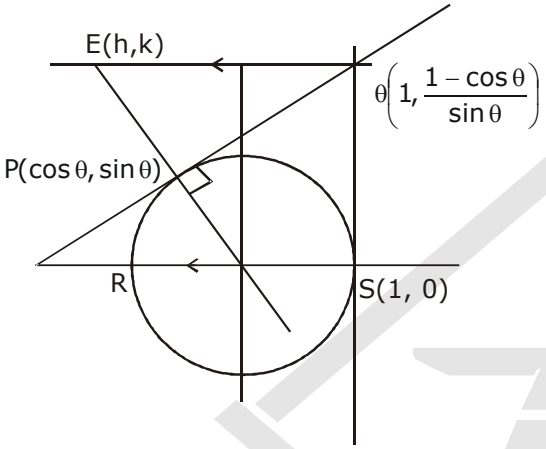
**45.** Let RS be the diameter of the circle $x^2 + y^2 = 1$, where S is the point (1, 0). Let P be a variable point (other than R and S) on the circle and tangents to the circle at S and P meet at the point Q. Then normal to the circle at P intersects a line drawn through Q parallel to RS at point E. Then the locus of E passes through the point(s)

(A) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (D) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

माना कि RS वत्त $x^2 + y^2 = 1$ का व्यास है, जहाँ कि S बिंदु (1, 0) है। माना कि P (R और S से भिन्न) वत्त पर एक चर बिन्दु है और वत्त पर बिन्दुओं S और P पर खींची गई स्पर्शरेखाऐं बिन्दु Q पर मिलती है। वत्त के बिन्दु P पर अभिलम्ब उस रेखा को, जो Q से गुजरती है तथा RS के समानान्तर है, बिन्दु E पर प्रतिच्छेदित करता है। तब E का बिन्दुपथ निम्न बिन्दुओं से गुजरता है।

(A) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (D) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

**Sol. A,C**




$T_P$ : $x \cos\theta + y \sin\theta = 1 \Rightarrow \theta : \left(1, \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$N_P$ : $y = (\tan\theta)x$ & L at θ || to RS

$$L : y = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$\tan\theta = \frac{K}{h}$

$\tan\theta/2 = K$

$\frac{2.K}{1-K^2} = \frac{K}{h}$

$1 - y^2 = 2x$

$y^2 = 1 - 2x$

**46.** Let $f : R \to R$, $g : R \to R$ and $h : R \to R$ be differentiable functions such that $f(x) = x^3 + 3x + 2$, $g(f(x)) = x$ and $h(g(g(x))) = x$ for all $x \in R$. Then

(A) $g'(2) = \frac{1}{15}$ (B) $h'(1) = 666$ (C) $h(0) = 16$ (D) $h(g(3)) = 36$

माना कि $f : R \to R$; $g : R \to R$ और $h : R \to R$ ऐसे अवकलनीय फलन हैं कि सभी $x \in R$ के लिए $f(x) = x^3 + 3x + 2$, $g(f(x)) = x$ और $h(g(g(x))) = x$ हैं। तब

(A) $g'(2) = \frac{1}{15}$ (B) $h'(1) = 666$ (C) $h(0) = 16$ (D) $h(g(3)) = 36$

**Sol.** **B,C**

$f(x) = x^3 + 3x + 2$

$f(0) = 2 \Rightarrow g(2) = 0$
$f(-1) = -2 \Rightarrow g(-2) = -1$
$f(1) = 6 \Rightarrow g(6) = 1$
$f(2) = 16 \Rightarrow g(16) = 2$
$f(3) = 38$
$f(6) = 111 \Rightarrow g(111) = 6$
$f'(x) = 3x^2 + 3$

**(B)** $h(g(g(x))) = x$

$x = 16$
$h(g(2)) = h(0) = 16$

**(C)** $h'(g(g(x)))\, g'(g(x))\, g'(x) = 1$

$x = 111$
$h'(1)\ \ g'(6)\ \ g'(111) = 1$

$h'(1)\frac{1}{6} \times \frac{1}{111} = 1$

$h'(1) = 666$

**47.** Let $f : (0, \infty) \to R$ be a differentiable function such that $f'(x) = 2 - \frac{f(x)}{x}$ for all $x \in (0, \infty)$ and $f(1) \neq 1$. Then

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+} f'\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ (B) $\lim\limits_{x\to 0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right) = 2$ (C) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 f'(x) = 0$ (D) $|f(x)| \leq 2$ for all $x \in (0,2)$

माना कि $f : (0, \infty) \to R$ एक अवकलनीय फलन ऐसा है कि सभी $x \in (0, \infty)$ के लिए $f'(x) = 2 - \frac{f(x)}{x}$, और $f(1) \neq 1$ है। तब

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+} f'\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ (B) $\lim\limits_{x\to 0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right) = 2$ (C) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 f'(x) = 0$ (D) सभी $x \in (0,2)$ के लिए $|f(x)| \leq 2$

**Sol.** **A**

$f : (0, \infty) \to R$

$f'(x) = 2 - \frac{f(x)}{x}$

$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{y}{x}$

$x\frac{dy}{dx} = 2x - y$

$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 2$

$I.F = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$

$y.x = \int 2x\, dx$

$y.x = x^2 + C$

$y = x + \frac{C}{x}$

$y' = 1 - \frac{C}{x^2}$

**(A)** $\lim_{x \to 0^+} f'\left(\frac{1}{x}\right) = 2 - \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$= 2 - x.f\left(\frac{1}{x}\right)$

$= 2 - \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{1 - \frac{1}{x^2}} \qquad = +\frac{x^2}{x^2}.f'\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x \to 0^+} f'\left(\frac{1}{x}\right) = 2 - f'\left(\frac{1}{x}\right)$

$2l = 2$

$l = 1$

**(B)** $\lim_{x \to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to 0^+} \left(2 - f'\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1$

**(C)** $\lim_{x \to 0^+} x^2.f'(x)$

$= \lim_{x \to 0^+} \left(2x^2 - x.f(x)\right) = -C$

**(D)** Not Bounded

**48.** Let $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$, where $a \in R$. Suppose $Q = [q_{ij}]$ is a matrix such that $PQ = kI$, where $k \in R$, $k \neq 0$ and I is the identity matrix of order 3. If $q_{23} = -\frac{k}{8}$ and $\det(Q) = \frac{k^2}{2}$, then

(A) $\alpha = 0, k = 8$
(B) $4\alpha - k + 8 = 0$
(C) $\det(P\,\text{adj}(Q)) = 2^9$
(D) $\det(Q\,\text{adj}(P)) = 2^{13}$

माना कि $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$, जहाँ $a \in R$ है। मान लिजिए कि $Q = [q_{ij}]$ एक ऐसा आव्यूह है कि $PQ = kI$ जहाँ $k \in R$, $k \neq 0$ और I तीन कोटि (order 3) का तत्समक आव्यूह है। यदि $q_{23} = -\frac{k}{8}$ और $\det(Q) = \frac{k^2}{2}$ हो, तब

(A) $\alpha = 0, k = 8$
(B) $4\alpha - k + 8 = 0$
(C) $\det(P\,\text{adj}(Q)) = 2^9$
(D) $\det(Q\,\text{adj}(P)) = 2^{13}$

**Sol.** **B,C**

$PQ = KI$

$Q = K \cdot P^{-1}$

$$= K\frac{\begin{bmatrix} 5\alpha & -10 & -\alpha \\ 3\alpha & -6 & -3\alpha-4 \\ -10 & 12 & -2 \end{bmatrix}}{12\alpha+20}$$

$(3\alpha+4)8 = 12\alpha+20$

$24\alpha+32 = 12\alpha+20$

$12\alpha = -12$

$\alpha = -1$

$|Q| = K^3.\frac{1}{|P|}$

$\Rightarrow \frac{K^3}{12\alpha+20} = \frac{K^2}{2}$

$K = \frac{8}{2} = 4$

(C) $|P|.|Q|^2$

$8 \times \left(\frac{4^3}{8}\right)^2 = 2^9$

(D) $|Q|.|P|^2$

$\frac{K^3}{|P|}.|P|^2 = 4^3 \times 8$

$2^9$

**49.** The circle $C_1 : x^2 + y^2 = 3$, with centre at O, intersects the parabola $x^2 = 2y$ at the point P in the first quadrant. Let the tangent to the circle $C_1$ at P touches other two circles $C_2$ and $C_3$ at $R_2$ and $R_3$, respectively. Suppose $C_2$ and $C_3$ have equal radii $2\sqrt{3}$ and centres $Q_2$ and $Q_3$ respectively, If $Q_2$ and $Q_3$ lie on the y-axis, then

(A) $Q_2Q_3 = 12$ (B) $R_2R_3 = 4\sqrt{6}$

(C) area of the triangle $OR_2R_3$ is $6\sqrt{2}$ (D) area of the triangle $PQ_2Q_3$ is $4\sqrt{2}$

वत्त $C_1 : x^2 + y^2 = 3$ जिसका केन्द्रबिन्दु O है, परवलय $x^2 = 2y$ को प्रथम चतुर्थांश में बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित करता है। माना कि वत्त $C_1$ के बिन्दु P पर खींची गई स्पर्शरेखा अन्य दो वत्तों $C_2$ और $C_3$ को क्रमशः बिन्दुओं $R_2$ तथा $R_3$ पर स्पर्श करती हैं। मान लीजिए कि $C_2$ और $C_3$ दोनों की त्रिज्याऐं $2\sqrt{3}$ के बराबर है और उनके केन्द्रबिन्दु क्रमशः $Q_2$ और $Q_3$ हैं। यदि $Q_2$ और $Q_3$ y-अक्ष पर स्थित हैं, तब

(A) $Q_2Q_3 = 12$ (B) $R_2R_3 = 4\sqrt{6}$

(C) त्रिभुज $OR_2R_3$ का क्षेत्रफल $6\sqrt{2}$ है (D) त्रिभुज $PQ_2Q_3$ का क्षेत्रफल $4\sqrt{2}$ है

**Sol.** **A,B,C**

Equ. of circles

$$x^2 + (y - a)^2 = 12$$

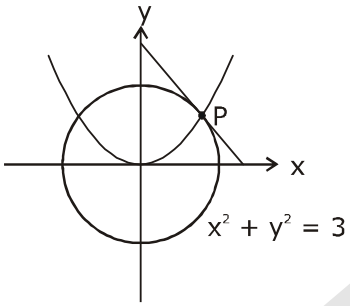
Tangent at P

$$\sqrt{2}x + y = 3$$

Solve with circles

$$\left(\frac{3-y}{\sqrt{2}}\right)^2 + (y - a)^2 = 12$$

$$3y^2 - 2y(3 + 2a) + (2a^2 - 15) = 0$$






$D = 0$

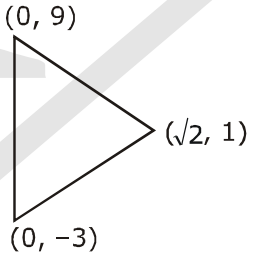
$\therefore$ $a^2 - 6a - 27 = 0$

(A) $Q_1Q_2 = \therefore |a_1 - a_2| = \sqrt{144} = 12$

(B) $C_1(0, 9)$ normal $\quad$ $C_2(0, -3)$ normal

$y - 9 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x)$ $\quad$ $y + 3 = \frac{1}{\sqrt{2}}x$

$x - \sqrt{2}y + 9 = 0$ $\quad$ $x - \sqrt{2}y - 3 = 0$






On solving $R_2 R_3 = 4\sqrt{6}$

(C) $\perp^r$ from (0, 0) on $\sqrt{2}x + y - 3 = 0$

$P = \sqrt{3}$

$\therefore$ $\Delta = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{6} \times \sqrt{3}$

$= 4\sqrt{2}$

(D) Area $= \frac{1}{2} \times 12 \times 1 = 6$

## SECTION – III

**50.** The total number of distinct $x \in [0, 1]$ for which $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^4}dt = 2x - 1$ is

ऐसे सभी भिन्न $x \in [0, 1]$ जिनके लिए $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^4}dt = 2x - 1$ है, की कुल संख्या है।

**Sol.** **1**

$$g(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^4}dt - 2x + 1 = 0$$

$f(0) = 1$

$f(1) = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4} - 1 = 0$ –ve

$< 0$

$\Rightarrow \exists$ atleast one solution
$\because g'(x) < 0 \ \forall \ x \in [0, 1]$
$\Rightarrow \exists$ exactly one solution

**51.** Let m be the smallest positive integer such the coefficient of $x^2$ in the expansion $(1 + x)^2 + (1 + x)^3 + .... + (1 + x)^{49} + (1 + mx)^{50}$ is $(3n + 1)\ {}^{51}C_3$ for some positive integer n. The the value of n is

माना कि m ऐसा न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक है कि $(1 + x)^2 + (1 + x)^3 + .... + (1 + x)^{49} + (1 + mx)^{50}$ के विस्तार में $x^2$ का गुणांक $(3n + 1)\ {}^{51}C_3$ किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए है। तब n का मान है।

**Sol.** **5**

$(1 + x)^2 + (1 + x)^3 + ..... + (1 + x)^{49} + (1 + mx)^{50}$
coff. $x^2 = {}^2C_2 + {}^3C_2 + ..... + {}^{49}C_2 + m^2\ {}^{50}C_2 = (3n + 1)\ {}^{51}C_3$
${}^3C_3 + {}^3C_2 + ..... + {}^{40}C_2$
${}^{40}C_3 + {}^{40}C_2$
${}^{50}C_3 + m^2\ {}^{50}C_2 = (3n + 1)\ {}^{51}C_2$

$\frac{50!}{3!.47!} + m^2 \frac{50!}{2!.48!} = \frac{(3n+1)51}{3!.(48)}$

$\frac{1}{3} + \frac{m^2}{48} = \frac{(3n+1)51}{483.48}$
$48 + 3m^2 = (3n + 1)51$
$3m^2 + 48 \pm 3n + 1 + 51$
$m^2 = n.51 + 1$
$m^2 = 1 + 51.n$

$\frac{m^2 - 1}{51} = n$
$51.n + 1 = m^2$
$17.3.n + 1 = m^2$
$n = 5$

**52.** Let $z = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$, where $i = \sqrt{-1}$, and r, s $\in$ [1, 2, 3]. Let $P = \begin{bmatrix} (-z)^r & z^{2s} \\ z^{2s} & z^r \end{bmatrix}$ and I be the identity matrix of order 2. Then the total number of ordered pairs (r, s) for which $P^2 = -I$ is

माना कि $z = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$ है, जहाँ $i = \sqrt{-1}$ और r, s $\in \{1, 2, 3\}$ हैं। माना कि $P = \begin{bmatrix} (-z)^r & z^{2s} \\ z^{2s} & z^r \end{bmatrix}$ और I दो कोटि (order 2) का तत्समक आव्यूह है। तब वे सभी क्रमित युग्म (r, s) जिनके लिए $P^2 = -I$ है, की कुल संख्या है।

**Sol.** **1**

$z = w$ $\qquad$ r, s $\in \{1, 2, 3\}$
$P^2 = -I$

$P = \begin{bmatrix} (-w)^r & w^{2s} \\ w^{2s} & (w)^r \end{bmatrix}$

$P^2 = \begin{bmatrix} w^{2r} + w^{4s} & (-1)^r w^{r+2s} + w^{r+2s} \\ (-1)^r w^{r+2s} + w^{r+2s} & w^{4s} + w^{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad ((-1)^r + 1)\ w^{r+2s} = 0 \quad \Rightarrow \quad w^{2r} + w^{4s} = -1$

r = 1

| | | |
|---|---|---|
| S = 1 | 0 | $w^2 + w^4 = -1$ |
| S = 2 | 0 | $w^2 + w^8 \neq -1$ |
| S = 3 | 0 | $w^2 + w^{12} \neq -1$ |

r = 2

| | |
|---|---|
| S = 1 | $\neq 0$ |
| S = 2 | $\neq 0$ |
| S = 3 | $\neq 0$ |

r = 3

| | | |
|---|---|---|
| S = 1 | 0 | $\neq -1$ |
| S = 2 | 0 | $\neq -1$ |
| S = 3 | 0 | $\neq -1$ |

$\Rightarrow$ Only one solution (1, 1)

**53.** Let $\alpha, \beta \in R$ be such that $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\beta x)}{\alpha x - \sin x} = 1$. Then $6(\alpha + \beta)$ equal

माना कि $\alpha, \beta \in R$ इस प्रकार है कि $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\beta x)}{\alpha x - \sin x} = 1$ है। तब $6(\alpha + \beta)$ का मान है।

**Sol. 7**

$$\alpha\beta \in R \lim_{x\to 0} \frac{x^2.\sin(\beta x)}{\alpha x - \sin x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left[\sin\left(\frac{\beta x}{\beta x}\right) x\beta x\right]}{\alpha x - \sin x} = 1$$

$$\beta \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\alpha x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)} = 1$$

$$\beta \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x(\alpha - 1) + \frac{x^3}{6}} = 1$$

let $\alpha = 1$

$$\beta \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \times 6}{x^3} = 1$$

$6\beta = 1$

$6\alpha + 6\beta = 6 + 1 = 7$

**54.** The total number of distinct $x \in R$ for which $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ 2x & 4x^2 & 1+8x^2 \\ 3x & 9x^2 & 1+27x^3 \end{vmatrix} = 10$ is

ऐसे सभी भिन्न $x \in R$, जिनके लिए $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ 2x & 4x^2 & 1+8x^2 \\ 3x & 9x^2 & 1+27x^3 \end{vmatrix} = 10$ है, की संख्या है

**Sol. 2**

$$x^3\begin{vmatrix}1 & 1 & 1+x^3\\ 2 & 2^2 & 1+2^3x^3\\ 3 & 3^2 & 1+3^3x^3\end{vmatrix}=10$$

$$x^3\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2^2 & 1\\ 3 & 3^2 & 1\end{vmatrix}+x^6\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2^2 & 2^3\\ 3 & 3^2 & 3^3\end{vmatrix}=10$$

$\Rightarrow$ $-x^3((1-2)(2-3)(3-1))+x^6.2.3(1-2)(2-3)(3-1)=10$

$\Rightarrow$ $-x^3(-1)(-1)(2)+6x^6((-1)(-1)(2))=10$

$\Rightarrow$ $x^3\left[-2+12x^3\right]=10$

$\Rightarrow$ $12x^6-2x^3-10=0$

$6x^6-x^3-5=0$

$6t^2-t-5=0$

$(t-1)(6t+5)=0$

$t = 1, -\frac{5}{6}$

$t = x^3 = 1, -\frac{5}{6}$

$x = 1, \left(-\frac{5}{6}\right)^{1/3}$